La vérité en géométrie : sur le rejet de la doctrine conventionnaliste

Scott Walter

Philosophia Scientiæ 2 (1997), 103–135

Résumé

The reception of Poincaré's conventionalist doctrine of space by mathematicians is studied for the period 1891–1911. The opposing view of Riemann and Helmholtz, according to which the geometry of space is an empirical question, is shown to have swayed several geometers. This preference is considered in the context of changing views of the nature of space in theoretical physics, and with respect to structural and social changes within mathematics. Included in the latter evolution is the emergence of non-Euclidean geometry as a new sub-discipline.

La réception mathématique de la doctrine conventionnaliste d'Henri Poincaré est examinée pour la période de 1891 à 1911. Nous montrons que le point de vue opposé, selon lequel la géométrie de l'espace est une question d'expérience, a obtenu l'approbation de plusieurs géomètres. Cette préférence est mise en rapport avec l'évolution de la notion de l'espace en physique théorique, et les changements structurels et sociaux en mathématiques, y compris l'émergence de la géométrie non euclidienne en tant que sous-discipline mathématique.

1 Introduction

Peu après les premières confirmations de la théorie de la relativité générale, Albert Einstein et d'autres savants ont mis en cause le point de vue conventionnaliste sur la géométrie de l'espace[1]. Selon cette doctrine métaphysique, introduite en 1891 par Henri Poincaré (1854-1912), définir les objets géométriques à partir des phénomènes physiques ne présentait pas d'intérêt. D'après certains commentateurs, l'influence qu'elle exerçait sur les mathématiciens était considérable, et on suppose même que le conventionnalisme des mathématiciens leur aurait coûté la découverte de la théorie de la relativité générale[2]. À l'encontre de cette hypothèse, nous verrons que les géomètres, au premier plan des débats sur le problème de l'espace, n'ont pas admis la doctrine conventionnaliste.

La philosophie conventionnaliste étant l'un des thèmes chers à la tradition analytique, les études apparentées sont très nombreuses[3]. Le problème de l'espace au dix-neuvième siècle est également le sujet de plusieurs livres, notamment ceux d'Alberto Coffa [1991], Roberto Torretti [1984], et Jeremy Gray [1989]. Notre discussion se bornera à la réception accordée à la doctrine conventionnaliste de l'espace par les mathématiciens, de 1891 à 1911, ce qui correspond à l'introduction de la doctrine et à la diffusion générale des idées relativistes, respectivement.

Cet essai se divise en trois parties. Nous commencerons avec quelques précisions sur le sens de la doctrine de Poincaré, puis nous prendrons en considération le regard des physiciens sur le problème de l'espace, avant d'aborder la réponse mathématique à la doctrine de Poincaré.

2 La doctrine de Poincaré

La philosophie de la géométrie de Poincaré a pris forme à la suite des débats des années 1870 autour de la cohérence logique et la signification physique de la géométrie non euclidienne. Sans que les mathématiciens français aient initié la réévaluation des fondements de la géométrie, les idées avancées par Bernhard Riemann, Eugenio Beltrami et Hermann Helmholtz ont trouvé des partisans - et des opposants - sur le sol français[4].

Vers 1870, on sait que les notes traitant de la géométrie non euclidienne soumises à l'Académie des Sciences ont été retournées à leurs auteurs[5]. Le conflit jusqu'alors discret entre les "euclidiens" et les "non euclidiens" a été rendu public par l'affaire Carton. Quelques géomètres trouvaient scandaleux qu'on publie dans les *Comptes rendus de l'Académie* une soi-disant démonstration du fameux postulat des parallèles d'Euclide (selon lequel des droites parallèles ne se rencontrent jamais). Les pressions qu'ils exercèrent sur celui qui soutenait cette publication, Joseph Bertrand, le persuadèrent enfin d'admettre le caractère peu concluant de la preuve de Carton. C'est ainsi qu'un certain droit de cité s'établit à propos de la géométrie non euclidienne dans les mathématiques françaises[6].

Un droit équivalent en philosophie a été plus difficile à obtenir. En ce qui concerne la géométrie de l'espace, notamment, le plaidoyer de Paul Tannery [1876] en faveur de l'empirisme rencontra l'opposition des philosophes néo-criticistes Charles Renouvier et Louis Couturat. L'un des arguments principaux employés à l'encontre de la géométrie non euclidienne a été "l'objectivité" de la géométrie euclidienne. Dans la philosophie néo-criticiste, ce terme correspondait à l'intuition spatiale qui sous-tendait le statut de la géométrie euclidienne, à la fois comme une science idéale, et exemplaire de la connaissance synthétique *a priori*[7].

Dès ses débuts, la philosophie de la géométrie de Poincaré a subi l'influence des écrits de Hermann Helmholtz, en ce qu'elle se fonda sur la notion du déplacement sans déformation d'un corps solide. D'après Helmholtz [1866, 197, 201], l'existence des corps solides permettait une détermination -quoiqu'approximative -de la géométrie de l'espace. La première publication de Poincaré sur la question apparut dans une revue de mathématiques en 1887, l'année de son entrée à l'Académie des Science, dans la section de géométrie, et un an après sa nomination à la chaire de physique mathématique à la Sorbonne. Poincaré envisagea la possibilité de confirmer l'euclidicité de l'espace à travers l'étude des mouvements des corps solides :

> [I]l existe dans la nature des corps remarquables qu'on appelle les *solides* et l'expérience nous apprend que les divers mouvements possibles de ces corps sont liés à fort peu près par les mêmes relations que les diverses opérations du groupe [euclidien]. [Poincaré 1887, 91]

Une telle détermination du groupe de transformations de l'espace physique dépendait pour Poincaré de l'observation des phénomènes physiques, ce qui signifiait que la géométrie de l'espace ne pouvait être connue avec certitude.

Entre 1887 et 1891, Poincaré durcit sa position. Il publia ses idées nouvelles sur "Les géométries non euclidiennes" dans un bimensuel, la *Revue générale des sciences pures et appliquées*. Poincaré raisonna :

> Si la géométrie était une science expérimentale, elle ne serait pas une science exacte [et] serait dès aujourd'hui convaincue d'erreur ...

Il trouva inacceptable cette conséquence, et décida que la question de la géométrie de l'espace n'avait "aucun sens" [1891, 773]. Sur ce point, Poincaré se distinguait de Helmholtz, pour qui la géométrie de l'espace était déterminée par l'expérience, pourvu qu'on adjoignît un principe mécanique aux axiomes de la géométrie[8]. Chez Poincaré, une telle adjonction était inutile, parce que notre connaissance des objets de la mécanique ne serait jamais exacte. Il avança une deuxième raison en faveur de son point de vue : si “par impossible” un phénomène physique semblait mettre en cause la géométrie euclidienne, on modifierait les lois de la physique avant d'abandonner la géométrie euclidienne [1891, 774].

Poincaré introduisit à la même occasion une réponse d'inspiration nominaliste aux arguments des opposants de la géométrie non euclidienne. Il proposa la traduction des objets de la géométrie euclidienne (la droite, le plan, la distance, l'angle, etc.) dans le langage de la géométrie non euclidienne, affirmant ainsi la cohérence relative de ces géométries[9]. Mais en même temps, la question de savoir laquelle était la *vraie* géométrie perdit son sens, parce que la vérité des théorèmes de la géométrie euclidienne se laissait traduire désormais dans l'énoncé des théorèmes de la géométrie non euclidienne. Selon la formule de Poincaré, les axiomes de la géométrie étaient des *définitions déguisées* [1891, 773].

Entre 1891 et 1906, Poincaré rédigea une série de mémoires développant ses propos, souvent en réponse aux critiques provenant des logiciens (dont Bertrand Russell), introduisant des arguments qu'il trouvait dans des endroits aussi variés que la théorie des groupes et le darwinisme social. Avec la publication de son premier recueil d'articles philosophiques, *La science et l'hypothèse* [1902*a*], les idées de Poincaré ont connu une diffusion très large. Une évaluation exhaustive de la réception de ce livre dépasserait le cadre restreint de cette étude ; il est clair pourtant que si sa philosophie conventionnaliste impressionna certains philosophes (Paul Natorp, Aloys Müller) et quelques savants (Hugo von Seeliger, Théophile de Donder), elle n'a pas convaincu les géomètres, comme nous le verrons en détail[10].

Regardons maintenant les orientations envers la géométrie de l'espace, parmi les physiciens d'abord, chez les mathématiciens ensuite, pendant la vingtaine d'années entre 1891 et 1911. La distinction disciplinaire n'est pas essentielle ; notre objectif est de rendre compte de l'évolution de la compréhension physique de la notion de l'espace avant d'aborder les réponses des mathématiciens au problème de l'espace. Pour simplifier la rédaction, désormais nous parlerons de l'interdiction de toute définition empirique de l'objet géométrique en tant que *doctrine de Poincaré*.

3 La géométrie de l'espace selon les physiciens

À la fin du dix-neuvième siècle, peu de physiciens voyaient une quelconque utilité de la géométrie non euclidienne en physique. L'abstraction de cette géométrie a été un obstacle même pour les théoriciens. Au laboratoire Cavendish, James Clerk Maxwell lut la traduction anglaise de la *Habilitationsvortrag* de Bernhard Riemann, où il était question de décrire l'élément linéaire dans un espace à n dimensions par la racine de la somme des carrés d'une fonction homogène du second degré des différentielles des coordonnées,

$$ds = \sqrt{\Sigma\,(dx)^2}.$$

Dans une correspondance avec P. G. Tait, Maxwell remarqua que la pertinence de la définition riemannienne des coordonnées lui échappait [Harman 1982, 97]. Comme Maxwell, J. B. Stallo [1890, §14] et Ernst Mach [1906, 108] ne voyaient pas de sens physique dans la démarche de Riemann. Pour autant, tous les physiciens n'étaient pas fermés à ses idées ; Ludwig Boltzmann s'y intéressa, par exemple (nous y reviendrons).

Au delà de l'abstraction technique de la géométrie non euclidienne, son intérêt semblait limité du fait de la confirmation empirique de l'euclidicité de l'espace. Les mesures faites par l'astronome Karl Schwarzschild de la parallaxe stellaire en 1900 confirmèrent la conclusion tirée auparavant par Lobachevsky : si l'espace était en fait hyperbolique ou elliptique, alors son rayon de courbure devrait être très important [Jammer, 163]. Prise dans les limites de la précision goniométrique, l'hypothèse euclidienne semblait justifiée par les observations ; elle n'était pas contredite, de toute façon, dans le domaine astronomique. Néanmoins, comme l'a remarqué le mathématicien Felix Hausdorff [1904, 5], on ne pouvait pas exclure l'existence d'une courbure au delà du seuil de l'observation.

La compréhension de la nature de l'espace subissait une transformation dans la période suivant la découverte des ondes électromagnétiques par Heinrich Hertz, lorsque les savants du continent s'intéressaient à la théorie de Maxwell. Prenons l'exemple de Paul Drude, qui observa dès 1894 que les propriétés physiques qu'on attribuait à l'éther pouvaient être en fait des propriétés de l'espace. Seulement, rajouta-t-il, les physiciens préféraient considérer l'espace en tant qu'une conception abstraite [Darrigol, 256]. Mais à peine six ans plus tard, avec le succès de la théorie des électrons de H.-A. Lorentz, Drude adopta une position encore plus radicale. L'hypothèse d'un éther immobile que faisait Lorentz, Drude écrivit en 1900, était bien "la plus simple et la plus naturelle", à condition qu'on considère l'éther non pas "comme une substance, mais tout simplement comme de l'espace doué de certaines propriétés physiques" [1912, 241].

La manifestation physique de la géométrie non euclidienne a été un thème mineur de la physique à la fin du dix-neuvième siècle, qui accompagnait souvent des spéculations sur le nombre de dimensions de l'espace[11]. Le physicien Friedrich Zöllner, par exemple, proposa une connexion entre l'espace riemannien à n dimensions et le comportement de l'atome d'électricité dans le schéma weberien de l'électrodynamique. En Angleterre, Karl Pearson et W.W. Rouse Ball ont invoqué un "éther à quatre dimensions" pour expliquer la gravitation. D'autres parlèrent de l'hyperespace en tant que lieu de combinaison chimique, comme on voit dans un petit livre de Maurice Boucher sur la quatrième dimension [1905, 109]. Ce genre de spéculation a été sanctionné par Ernst Mach, pour qui les objets théoriques tels que les atomes et les molécules n'étaient pas contraints à l'existence dans un espace ordinaire [1906, 138-9]. Mais les conjectures concernant l'hyperespace ne quittaient pas le stade spéculatif, même si quelques recherches en chimie semblent avoir été motivées, au moins en partie, par ce concept [Severi 1910, 12].

La géométrie non euclidienne, qui complétait en quelque sorte l'outillage conceptuel des objets abstraits chez Mach, trouvait chez d'autres physiciens un objet réel, à savoir l'espace. Paul Volkmann, le professeur de physique théorique à l'Université de Königsberg, trouva dans la géométrie non euclidienne une généralisation importante de l'intuition spatiale (*Raumanschauung*). Il s'agissait d'une "ressource", destinée à "l'identification des propositions qu'on doit choisir comme les principes de l'espace réel et *euclidien*"[12]. La valeur de la géométrie non euclidienne se limitait donc chez Volkmann au domaine de l'examen logique des postulats de la géométrie euclidienne.

De tels exemples montrent bien que l'application de la géométrie non euclidienne en physique avait lieu en marge de la physique. Certains théoriciens, pourtant, suivaient de près les recherches géométriques. Hertz et Boltzmann, par exemple, sentaient tous les deux que la physique pourrait profiter des techniques employées dans ces recherches.

Un admirateur des travaux de Lipschitz, Hertz poursuivit un projet de reformulation de la mécanique, fondée sur l'application de la géométrie de Riemann dans un espace de configuration, dont la dimension dépendait du nombre de degrés de liberté du système étudié [Hertz 1894]. Célèbre parmi les théoriciens, la mécanique de Hertz n'incita pourtant pas d'applications intéressants, et on la considère comme une voie sans issue dans l'histoire de la physique (Lützen [1995*b*, 81]).

Il paraît toutefois que la mécanique de Hertz avait une certaine valeur apodictique vis-à-vis de l'utilité de la géométrie hyperspatiale. Boltzmann était de cet avis, et c'est pour cette raison qu'il exposa les principes de la mécanique de Hertz dans son cours de philosophie à Vienne en 1903-1904. Il trouvait d'ailleurs que les recherches géométriques de Riemann avaient une valeur intrinsèque, et qu'il était "très important" de les apprendre, même si elles n'avaient pas d'utilité pratique [1990, 255].

Boltzmann en est venu au problème de l'espace, en disant que la possibilité d'une confirmation de la structure non euclidienne de l'espace par les mesures du parallaxe stellaire était "entièrement concevable". De telles mesures ne seraient probablement jamais constatées, dit-il, mais si elles se réalisaient un jour, "l'intuition serait contrainte de s'y accommoder"[13]. Boltzmann n'a pas envisagé dans son cours la modification des lois de l'optique pour sauver la géométrie euclidienne, à la manière de Poincaré. Dans sa bibliographie, tout de même, figurait *La science et l'hypothèse* [1990, 146].

La confiance de Boltzmann dans l'exactitude des lois de l'optique était partagée par Mach, qui admettait qu'un jour, les physiciens seraient peut-être obligés de modifier leurs notions "physico-métriques". Mach considérait (avec Poincaré) que l'objet géométrique n'avait pas d'équivalent en physique ; dans la pratique, rappela-t-il, on avait toujours affaire avec des objets physiques. Par conséquent, on pouvait demander si la trajectoire d'un rayon de lumière correspondait mieux à la notion de la droite en géométrie euclidienne ou non euclidienne. Mach envisagea l'observation d'une courbure spatiale, mais il rajouta que "le physicien ferait mieux d'attendre" sa réalisation avant de mettre en cause la géométrie euclidienne de l'espace [1906, 137]. Boltzmann et Mach admettaient donc la possibilité d'une courbure spatiale, mais ils n'accordaient pas de valeur pratique à l'étude de la géométrie riemannienne.

D'autres physiciens avaient une attitude moins indulgente que celle de Boltzmann et Mach. Les lecteurs du traité d'électricité de Max Abraham et August Föppl [1904, 35] étaient prévenus contre des théories physiques qui faisaient intervenir les espaces non euclidiens. Selon ces auteurs, il était peu probable que l'espace fût le siège des propriétés électromagnétiques, et par conséquent, il valait mieux "garder ses distances avec les investigations physiques des espaces non euclidiens"[14]. Cette remarque répondait à la position (déjà rencontrée) de Paul Drude, selon laquelle l'espace était porteur de propriétés physiques. Autrement, les journaux de physique de l'époque ne comportent pas d'investigations des espaces non euclidiens.

Pendant notre période d'étude, si quelques physiciens théoriciens étaient familiers du problème de l'espace, en général, ils ne s'en occupaient pas. Les physiciens formés aux techniques de la géométrie non euclidien restaient l'exception jusqu'aux années 1920, selon le témoignage de deux théoriciens exceptionnels, Max von Laue et Max Born. Auparavant, selon eux, la plupart des physiciens n'ont pas pu comprendre les méthodes de la géométrie non euclidienne[15]. Les physiciens n'ignoraient pas l'existence des géométries nouvelles ; ils se passaient des techniques dont l'utilité semblait extrêmement limitée.

4 La réception mathématique de la doctrine de Poincaré

Parmi les rares physiciens qui écrivaient sur la géométrie non euclidienne avant 1911, tous ont rejeté implicitement la doctrine de Poincaré. Les mathématiciens, et surtout les géomètres, s'intéressaient plus que leurs collègues physiciens au problème de l'espace. Déjà à l'époque, certains voulaient voir une différence entre la démarche des physiciens et des mathématiciens. Mach, par exemple, sentait que l'objet d'investigation n'était pas le même pour les physiciens et les mathématiciens dans le domaine de la géométrie non euclidienne :

> The deportment of physicists and mathematicians toward [the application of non-

Euclidean geometry to physical reality] is in the main different, but this is explained by the circumstance that for the former class of inquirers the physical facts are of most significance, geometry being for them merely a convenient implement of investigation, while for the latter class these very questions are the main material of research, and of greatest technical and particularly epistemological interest. [Mach 1906, 134]

Selon Mach, quand les mathématiciens étudiaient la géométrie non euclidienne, ils s'occupaient moins des faits physiques que des questions formelles et épistémologiques. Cette description de l'objet des recherches mathématiques est contredite en partie par bon nombre de témoignages. Il semble en effet qu'on puisse construire une autre image -plus hétérogène -de l'intérêt porté par les mathématiciens à la géométrie non euclidienne. S'intéresser à la géométrie non euclidienne ne signifiait pas en général un dédain pour les faits physiques. Au contraire, on rencontre souvent dans les écrits des géomètres la conviction que la géométrie était une science fondée sur l'expérience.

Dès l'époque de sa découverte, la géométrie non euclidienne a été présentée - notamment par J. Bolyai [1867] - comme la science de l'espace. Et alors que l'absence d'une démonstration de sa cohérence interne (ou de l'indépendance du postulat des parallèles) n'était pas faite pour inspirer la confiance de tous, la découverte des modèles dans l'espace euclidien rendait la géométrie non euclidienne presque visible. L'appel que faisaient les modèles à l'intuition visuelle donnait une impulsion nouvelle à l'idée d'un *espace courbe*. À travers les modèles à trois dimensions, l'espace physique, ou "l'espace de l'expérience" est devenu aussi le théâtre de la géométrie non euclidienne.

Les écrits de Helmholtz sur les fondements de la géométrie ont montré la pertinence de la démarche de Riemann, basée sur la géométrie différentielle. Dans un style limpide, Helmholtz [1876] démontra la nécessité de l'expression riemannienne de la distance dans un espace à courbure constante, une fois admis le mouvement libre des solides. Après avoir pris connaissance du modèle de Beltrami, il s'est rendu compte que la détermination de la géométrie de l'espace physique ne pouvait se faire sans l'adjonction à la géométrie d'une partie de la mécanique (la loi d'inertie, par exemple), comme nous l'avons mentionné dans la première partie. De cette façon, selon Helmholtz, l'expérience pouvait établir la structure euclidienne de l'espace.

Avec l'aide de Helmholtz, les idées de Riemann sur les fondements de la géométrie ont atteint un public plus important. Parmi les mathématiciens, le *Habilitationsvortrag* de Riemann [1867] est devenu le travail de référence pour tout ce qui concernait les questions de géométrie physique, comme l'ont remarqué Frank [1957, 84] et Nowak [1989]. En dépit des critiques de son concept de l'espace pour cause de manque de sophistication philosophique, le travail de Riemann incita des études de la statique et de la mécanique non euclidiennes chez de Tilly, Schering, et Killing, entre autres. Peut-être la plus remarquable des études riemanniennes est-elle celle de son traducteur, le professeur de mathématiques appliquées et de mécanique à *University College London*, William Kingdon Clifford. En 1870, Clifford imagina une réduction de la physique à une géométrie de la matière dans un espace de courbure variable, où les distorsions locales se propageraient "à la manière d'une onde"[16].

Toutefois, peu de mathématiciens ont poursuivi la possibilité d'une réalisation physique d'une géométrie à courbure variable. Les raisons n'en sont pas claires, mais peu de savants doutaient de l'homogénéité de l'espace physique [Jammer 1960, 158-9]. À la lumière des arguments de Helmholtz sur le déplacement des solides, la mesure et la comparaison des distances semblaient impliquer un espace de courbure constante[17].

De cette façon, le domaine des recherches mathématiques sur la géométrie de l'espace a été défini sans ambiguïté. Pour certains géomètres, comme Felix Klein, et le professeur de mathématiques au *Massachusetts Institute of Technology* Frederick S. Woods [1905, 31], les seules géométries dignes d'intérêt étaient celles compatibles avec les données empiriques, à l'exclusion des géométries de l'hyperespace ou de courbure variable.

Nous avons vu qu'à la fin des années 1870, les arguments de Riemann et de Helmholtz ont montré les conséquences importantes de la géométrie non euclidienne pour la compréhension de l'espace physique. Mais par rapport à la pratique mathématique, la géométrie non euclidienne resta marginale jusqu'au milieu des années 1880. L'application qui déclencha son changement de statut a été trouvée dans le domaine des équations différentielles linéaires, par un jeune chargé de cours de mathématiques à la Faculté des Sciences de Caen, Henri Poincaré.

Poincaré a découvert la théorie des fonctions fuchsiennes, dont l'établissement faisait appel aux transformations conformes du plan hyperbolique. Sa théorie fournissait une représentation paramétrique de toute courbe algébrique (par la fonction fuchsienne), et donnait la solution de toute équation différentielle linéaire aux coefficients algébriques (par la fonction zétafuchsienne)[18]. Lors de sa première démonstration de la fonction fuchsienne, Poincaré a introduit un modèle de la géométrie hyperbolique du plan, ce qu'on a désigné "le modèle du cercle" par la suite. En effet, la théorie de Poincaré prêtait un pouvoir de découverte à la géométrie non euclidienne, dont l'intérêt jusque là semblait être limité à la philosophie. Désormais, le statut de la géométrie non euclidienne était transformé, comme le souligna Poincaré :

> Cette Géométrie . . . ne semble d'abord qu'un simple jeu de l'esprit qui n'a d'intérêt que pour le philosophe, sans pouvoir être d'aucune utilité au mathématicien. Il n'en est rien . . . [*Œuvres*, I, x–xi]

L'étendue de la découverte de Poincaré et la nouveauté de sa méthode ont attiré l'attention des mathématiciens, même si certains, comme Charles Hermite et Felix Klein, ont eu du mal à comprendre le rapport entre les fonctions fuchsiennes et la géométrie hyperbolique. Le raisonnement de Poincaré est devenu plus accessible à la suite de la parution d'une série d'articles sur le sujet, entre 1881 et 1885. La décennie 1880-1890 a vu l'émergence d'une nouvelle compréhension de la géométrie non euclidienne. Considérée pendant longtemps comme une sorte de curiosité logique, la géométrie non euclidienne était en train d'entrer dans les "mathématiques usuelles", selon l'image de Christian Houzel [1991, 179].

Au début des années 1890, et dans la foulée de cette évolution intellectuelle due à la découverte de Poincaré, le nombre de mathématiciens intéressés par la géométrie non euclidienne atteint un niveau tel que ce domaine encore émergent était considéré par certains comme une nouvelle sous-discipline mathématique. Auparavant, la géométrie non euclidienne se rencontrait dans plusieurs branches des mathématiques, par exemple, dans la géométrie projective, et dans la théorie des invariants. On commence à voir, à partir de 1890, l'enseignement de la géométrie non euclidienne comme un sujet autonome. À Göttingen, par exemple, Felix Klein enseignait la géométrie non euclidienne en 1889-90 [Klein 1893], et à Cambridge, Alfred North Whitehead commença à exposer ce sujet en 1893 (J. Barrow-Green, comm. priv.).

À Paris, en revanche, au début du siècle il n'y avait pas de cours sur la géométrie non euclidienne en tant que telle, selon les répertoires de *L'Enseignement mathématique*. On sait pourtant que le sujet n'a pas été négligé par les professeurs de la Sorbonne. Les leçons de Gaston Darboux [1889] sur la géométrie différentielle, par exemple, comprenaient une revue des travaux de Lipschitz et de Beltrami sur la dynamique dans l'espace non euclidien. De même, le cours d'analyse d'Émile Picard [1893] traitait de la géométrie riemannienne.

Le contenu de ces cours n'était pas homogène, évidemment. Nous n'avons pas l'intention de faire un bilan des démarches pédagogiques, mais de suggérer qu'une discipline de géométrie non euclidienne prenait forme dans les années 1890. C'est peut-être Felix Klein le premier d'en parler de cette façon, lorsqu'il évoquait la "reale Disziplin" de la géométrie non euclidienne, qu'on ne devait surtout pas confondre avec les "abstrakten mathematischen Betrachtungen" dans son sillage [1890, 381-2]. Il s'agissait bien chez Klein d'une discipline du *réel*, comme le souligne Hawkins [1980, 319].

Le choix que fait Klein d'aborder la géométrie non euclidienne en tant qu'un sujet autonome d'étude s'est reproduit chez d'autres géomètres en Allemagne. Les répertoires du *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung* montrent qu'au début du vingtième siècle, on pouvait suivre des cours de géométrie non euclidienne dans cinq facultés allemandes (sur vingt et une) : Greifswald, Königsberg, Leipzig, Marburg et Münster.

Lorsque la doctrine conventionnaliste a émergé en même temps que la discipline de la géométrie non euclidienne, dans un sens, les deux n'allaient pas bien ensemble. La doctrine de Poincaré ôtait toute légitimité à un élément constitutif de la nouvelle discipline : l'investigation de la structure géométrique de l'espace physique.

On peut remarquer aussi la position curieuse occupée par Poincaré dans cette histoire. Après avoir transformé presque d'un coup le regard des mathématiciens sur l'utilité en mathématiques de la géométrie non euclidienne, Poincaré tenta en effet de circonscrire le champ d'application de cette géométrie à l'analyse pure.

À Paris, Émile Picard et Jacques Hadamard, dont les contributions à la géométrie étaient bien connues des chercheurs, ont été tous les deux collègues de Poincaré à la Sorbonne. Mais ils ne voyaient pas davantage l'intérêt de la doctrine conventionnaliste, et affirmèrent que la géométrie euclidienne de l'espace était déterminée par les données empiriques. Chez Hadamard, aucune justification n'accompagnait cette prise de position, comme si la réponse empiriste allait de soi. Picard se montra plus loquace ; pour lui, Helmholtz avait raison : le plus commode était en même temps le vrai[19].

Moins connus que Hadamard et Picard, trois autres géomètres français, Paul Barbarin, Adolphe Buhl et Hermann Laurent, ont également affiché une croyance empiriste[20]. Barbarin, qui enseignait au lycée Saint Louis, a même consacré l'un des chapitres de son livre de géométrie non euclidienne au thème interdit de la "géométrie physique". Son livre reprit la formulation donnée par Joseph Marie de Tilly de la doctrine empiriste de l'espace : parmi un nombre infini de géométries possibles, la géométrie de l'espace, ou la classe de géométries à laquelle elle appartient, peut être déterminée par l'expérience [1902, 4]. Mais Barbarin, comme ses collègues, se gardait de mentionner le nom de Poincaré dans ce contexte.

Dans les textes et les revues français nous n'avons retrouvé aucune trace de mathématiciens conventionnalistes. Le conventionnalisme géométrique ne se discutait pas, notamment, dans l'*Enseignement mathématique*, alors le lieu privilégié des travaux de philosophie et histoire des mathématiques en France. Faut-il y voir une politique rédactionnelle ? Buhl y collaborait au premier plan, et le directeur, C.-A. Laisant, ne cachait pas son opinion que la géométrie faisait partie des sciences expérimentales [Laisant 1911].

L'influence de la doctrine de Poincaré sur l'orientation des recherches ne se prête pas à une évaluation précise, à cause du faible niveau d'activité dans le domaine de la géométrie physique. Toutefois, il est certain qu'elle représentait une gêne pour ceux qui diffusaient les connaissances acquises dans ce champ. Un exemple de ce désagrément se trouve chez Heinrich Liebmann, alors collègue de Wilhelm Killing à Leipzig. Dans son livre sur la géométrie non euclidienne, Liebmann suivait l'exemple de Barbarin, en consacrant un chapitre à la géométrie de l'espace physique (*Erfahrungsraum*). Il expliqua dans la préface qu'il l'avait rédigé "en dépit du scepticisme des remarques de Poincaré" [1905, v]. Une telle mise en cause de la doctrine de Poincaré montre que celle-ci pouvait importuner l'enseignant-chercheur spécialisé en géométrie non euclidienne.

En fait, Liebmann concéda qu'une décision catégorique sur la géométrie de l'espace ne pouvait se faire uniquement sur une base empirique. Mais ailleurs, il remarqua le contraste entre la doctrine de Poincaré et l'argument des astronomes Karl Schwarzschild et Paul Harzer, selon lequel un univers de masse finie impliquait une géométrie elliptique [1911, 171]. Implicitement donc, Liebmann tenait la géométrie de l'espace pour une question de physique du cosmos.

De la même façon, les remarques de Felix Klein sur les fondements de la géométrie montrent qu'on pouvait bien admettre la faiblesse épistémologique du point de vue empiriste, sans aboutir à la doctrine de Poincaré. L'opinion de Klein a été comparée à celle de Poincaré par le positiviste Federigo Enriques, selon lequel l'un et l'autre reconnaissaient une brèche entre le contenu des postulats géométriques, d'un côté, et l'expérience et l'intuition, de l'autre. La différence entre les positions de Klein et Poincaré venait de ce qu'Enriques appelait le nominalisme de Poincaré ; c'est précisément ce qu'il trouvait inadmissible. Enriques considérait que Riemann et Helmholtz avaient raison : la géométrie était une branche de la physique[21]. La conséquence, selon un géomètre à Turin, Gino Fano, en était que la géométrie partageait la nature relative et approximative des théories physiques[22]. À la différence de Poincaré, cette perte de certitude ne l'a pas gêné.

La solution de Klein au problème de l'espace a été un compromis entre les vues de Fano et Poincaré. La géométrie, disait Klein, se laissait bien comprendre en tant que science physique. Son regard "pratique" sur la géométrie impliquait l'introduction d'une classe de techniques d'approximation, qu'il dénommait les "mathématiques de l'approximation", et exposait dans son cours d'application du calcul intégral et différentiel. Alternativement, la géométrie se laissait comprendre dans un sens abstrait ; il s'agissait des "mathématiques de précision". La science toute entière, a-t-il dit, se rangeait sous ses deux catégories [1902*a*, 11-12]. D'ailleurs, les mathématiques de l'approximation ne se réduisaient pas aux mathématiques de précision. Selon Klein, à partir des relations objectives du monde "externe", la mathématique appliquée gagnait un contenu conceptuel indépendant, qui dépassait l'appareil logique des mathématiques[23].

L'activité de Klein en faveur des applications de la géométrie s'étendait à la création d'un lieu de mémoire. Selon une légende célèbre à Göttingen à l'époque, Gauss aurait cherché à mettre l'euclidicité de l'espace à l'épreuve dans les années 1820, à travers la mesure des angles du triangle optique formé par des instruments installés en haut des montagnes Brocken, Inselsberg et Hohenhagen. En 1908, Klein sollicita des dons des sociétés astronomiques ou mathématiques, afin de construire une tour sur la Hohenhagen en l'honneur de Gauss. La pierre angulaire du monument devait être placée le jour d'anniversaire de Gauss, le 30 avril 1909, en présence de Poincaré et Hilbert[24].

L'évaluation de la doctrine de Poincaré s'emmêlait avec la dispute entre les mathématiques pures et les mathématiques appliquées. À la suite du développement des mathématiques pures, souvent identifié avec l'École de Berlin et ses maîtres Leopold Kronecker et Karl Weierstrass, des distinctions sociales ont émergé[25]. Les mathématiciens peu épris de la théorie des nombres se plaignaient d'un manque de respect de la part des mathématiciens purs. Lothar Heffter, par exemple, qui avait enseigné dans une école d'ingénieurs au début de sa carrière, se souvenait dans ses mémoires de la "perversion" que représentait le "dédain hautain" envers les applications des mathématiques, de la part des mathématiciens purs[26].

Ce n'était sûrement pas l'intention de Poincaré, mais selon une remarque de Paul Tannery, sa doctrine a établi une ligne de démarcation entre les mathématiques pures, d'une part, et la mécanique et la physique théorique, de l'autre part [1903, 392]. Elle séparait, en effet, la science pure de la géométrie du domaine "impur" des mathématiques appliquées. Poincaré associa celles-ci, dans un discours lu au premier Congrès des Mathématiciens, aux projets d'entrepreneurs :

> …les gens pratiques réclament seulement de nous le moyen de gagner de l'argent. Ceux-là ne méritent pas qu'on leur réponde ; c'est à eux plutôt qu'il conviendrait de demander à quoi bon accumuler tant de richesses et si, pour avoir le temps de les acquérir, il faut négliger l'art et la science qui seuls nous font des âmes capables d'en jouir et *propter vitam vivendi perdere causas*. [Poincaré 1897, 331]

Tant que le but n'était pas lucratif, précisa-t-il, l'interaction entre l'analyse pure et la physique mathématique était souhaitable [1897, 332-3]. Pourtant, sa condamnation ne mettait en cause que les mathématiciens appliqués, seuls soupçonnés d'avoir cédé à la tentation de gagner de l'argent plutôt que de poursuivre la vérité scientifique. Il y avait donc une catégorie de mathématiciens à part, à savoir les mathématiciens purs, qui n'étaient pas concernés par la mise en garde de Poincaré.

Avec Tannery, Enriques trouva dans la définition conventionnaliste de la vérité la source d'une distinction sociale. Il compara la vérité conventionnelle à

> un élégant paradoxe, un paradoxe qui par certains côtés aristochratiques [sic] non moins que par ses conséquences sociales, devait flatter particulièrement les tendances d'esprit d'une petite classe de penseurs …, intellectuels malgré eux. [*Scientia* **2**, 1907, 376]

À l'origine de la vérité conventionnelle, intellectuel malgré lui, Poincaré faisait partie, sans doute, de ceux visés par l'invective d'Enriques[27]. En fait, Poincaré ne dédaignait pas les mathématiques appliquées. Il les pratiquait à travers ses cours de physique mathématique, et les encourageait en tant que membre du comité de rédaction du périodique *L'Éclairage électrique*. En dépit de l'engagement de Poincaré en faveur des mathématiques appliquées, Enriques considérait que le conventionnalisme flattait les préjugés élitistes et narcissiques des mathématiciens purs.

À partir des remarques d'Enriques, il serait naturel de supposer que les conventionnalistes les plus convaincus se trouvaient dans le camp des mathématiciens purs. Or, il nous manque une évaluation quantitative du poids des mathématiciens purs dans l'ensemble des mathématiciens. Une telle étude pose un problème de méthode, car lorsque plusieurs mathématiciens s'identifiaient comme "puristes", parfois ils se permettaient de publier sur des questions impures.

En ce qui concerne les mathématiciens purs qui s'identifiaient comme tels, l'appartenance au camp conventionnaliste pourrait aller de soi, même si notre survol de la littérature ne nous en révèle qu'un exemple. Et comme l'aurait voulu Enriques, il est aristocrate de surcroît. Il s'agit du Baron Charles de La Vallée Poussin, Professeur à Louvain, qui posa la question de la réalité des objets mathématiques à l'occasion de son entrée à l'Académie royale de Belgique en 1908. Il affirma croire "pas plus que [Poincaré]" à l'objectivité de tels objets mais, ajouta-t-il, il était "encore possible" qu'il y eût "beaucoup de personnes, même parmi les mathématiciens, qui y croient" [1908, 1139]. Quoique tentative, son admission d'un certain rejet mathématique de la doctrine de Poincaré est signifiante, étant donné sa croyance conventionnaliste, et son état de mathématicien pur[28].

L'émergence des mathématiques pures entraînait des distinctions sociales et, en même temps, mettait en question la place des mathématiques dans la hiérarchie de la connaissance. Les vérités mathématiques ne se prêtaient plus toujours à la vérification expérimentale. Par conséquent, on se demandait si la science mathématique était ou bien une science physique (*Naturwissenschaft*) ou bien l'une des "sciences morales" (*Geisteswissenschaften*).

Les mathématiciens étaient partagés sur la question. Du point de vue "purement philosophique", Klein observa que la science mathématique ne dépendait pas des sciences physiques, et qu'"en soi", elle était "une science morale pure". Il précisa aussitôt que le lien institutionnel entre les sciences physiques et la science mathématique "s'imposait de l'intérieur" [1907, 137]. En clair, il ne s'agissait pas chez Klein de séparer les mathématiciens des autres chercheurs au sein de l'université.

À la différence de Klein, Leo Koenigsberger [1913] et Émile Picard [1911] trouvaient qu'en mathématiques il s'agissait à la fois d'une science physique *et* d'une science morale. De par cette appartenance double, unique à la science mathématique, Heinrich Timerding concluait qu'elle formait une sorte de terrain neutre, un pont entre les deux catégories fondamentales de la connaissance[29].

La géométrie faisant partie de la science mathématique, la nature de ses rapports avec l'expérience pesait sur ces considérations. Or, il n'y avait pas de consensus sur l'extension du terme *géométrie* ; certains travaux de géométrie algébrique, par exemple, semblaient appartenir plus à l'algèbre qu'à la géométrie [Gray 1994]. La conséquence en était, selon le moderniste Hausdorff, que tout débat sur le fondement empirique de la géométrie était futile [1904, 19].

Le problème de l'espace lui-même était insoluble selon Hausdorff, parce qu'au moins cinq sciences étaient intéressées, ce qui rendait tout consensus hors de portée[30]. Or, quelque part entre les mathématiques et la physique, l'astronomie ne figurait pas sur sa liste, mais les astronomes aussi avaient leur mot à dire. L'avis de Paul Harzer, directeur de l'observatoire de Kiel, a été publié dans la revue de la Société allemande des mathématiciens, et souvent cité. Harzer observa que, dès la découverte de la géométrie non euclidienne, l'astronomie faisait de la géométrie une science physique, parce qu'elle déterminait la courbure exacte de l'espace :

> Kein spezieller Wert der Krümmung kann aber als a priori vorberechtigt erscheinen ; nur die Erfahrung kann lehren, welcher Wert der Krümmung in der Geometrie des tatsächlich existierenden Raumes gültig ist. Damit ist der Geometrie die Vorzugsstellung einer Wissenschaft a priori entrissen und ihr, als Wissenschaft der Erfahrung, ihre Stellung unter den anderen Wissenschaften dieser Art, der analytischen Mechanik und den exakten Naturwissenschaften angewiesen worden, unter denen sie allerdings als allzeit bereite mächtige Hilfswissenschaft eine hervorragende Stelle beanspruchen darf. [Harzer 1908, 248-249]

La détermination de la structure géométrique de l'espace par l'observation de la lumière des étoiles lointaines fixait en même temps la situation de la géométrie par rapport aux autres domaines de la connaissance. Chez Harzer, la géométrie était déchue de son titre de science purement analytique et promue en tant que ressource efficace pour les sciences physiques.

La détermination de la structure non euclidienne de l'espace était admise par Harzer, sans égard à la possibilité de reformuler les lois de la physique dans un tel espace. Helmholtz et d'autres avaient admis depuis longtemps la cohérence d'une mécanique non euclidienne, mais les tentatives de Padova de trouver une explication mécanique de la théorie de l'électromagnétisme de Maxwell dans un espace non euclidien n'ont pas abouti [Tazzioli 1993].

Cependant, on pouvait admettre la possibilité d'une physique fondée simultanément sur la géométrie euclidienne et non euclidienne. C'est ce que fit Josef Wellstein, un ancien élève de Reye et de Christoffel, alors maître de conférences de mathématique appliquée à l'université (allemande) de Strasbourg. Dans son exposé des fondements de la géométrie, il observa qu'il n'y avait pas de preuve formelle que la direction de propagation des rayons lumineux coïncidait avec les trajectoires inertielles des corps rigides. En l'absence d'une telle démonstration, Wellstein fit la suggestion suivante :

> Es wäre denkbar, daß die Lichtstrahlen eine Nichteuklidische, die Trägheitsbahnen die Euklidische Geometrie verwirklichen, d. h. zu ihrer Erklärbarkeit in einem einheitlichen Systeme der Wissenschaft voraussetzen. [Wellstein 1905, 134-135]

Wellstein ne précisa ni comment l'optique serait réconciliée avec les lois de la mécanique, ni comment une optique non euclidienne entrerait dans un tel système.

Poincaré, pour sa part, avait suggéré [1891, 774] que si un jour on observait des trajectoires lumineuses courbes, on ne serait pas obligé de les considérer comme des droites de l'espace non euclidien, parce qu'on pourrait modifier la loi de la propagation rectilinéaire de la lumière dans l'espace euclidien. À la différence de Poincaré, Wellstein envisagea de manière explicite une physique hétérogène, où la lumière suivait les géodésiques d'un espace non euclidien, et les trajectoires inertielles des corps rigides réalisaient les droites de l'espace euclidien. Nous verrons bientôt que Poincaré n'était pas d'accord avec l'idée de Wellstein.

La traduction allemande de *La science et l'hypothèse* parut la même année que le traité de Wellstein, ce qui fournit à Paul Mansion l'occasion de s'exprimer sur la doctrine de Poincaré. Rédacteur en chef de la revue *Mathesis*, professeur à Gand et auteur de quelques dizaines d'articles sur la géométrie non euclidienne, Mansion expliqua son rejet de la doctrine. Croire à la nature conventionnelle de la géométrie, c'était rejeter la possibilité de mesurer des longueurs, ce qui revenait à "nier toute possibilité d'une connaissance quantitative de la nature". Mais le catholique Mansion doutait que "personne aille jusque-là " [1905, 5].

Un lecteur de la traduction anglaise, Edwin B. Wilson, a été presque aussi acerbe dans sa critique de la doctrine de Poincaré. Ancien étudiant du physicien mathématicien J. W. Gibbs, Wilson suivit le cours de Poincaré en 1902-3, avant d'être nommé maître de conférences de mathématiques à Yale [Lindsay 1963]. Wilson décrivit la doctrine de Poincaré comme un "dogme", reprenant ainsi le terme employé par David Hilbert [1905] à propos du fondement de l'arithmétique proposé par Kronecker. Il fit aussi une distinction entre la valeur de la doctrine en mathématiques et en physique. La démarche de Poincaré, "toujours possible" en mathématiques, paraissait "très artificielle [et] teintée de superficialité" aux physiciens. Les développements récents de la théorie électrodynamique, d'après Wilson, avaient montré l'erreur de la doctrine de Poincaré. En effet, dit-il, les principes de la mécanique étaient moins fondamentaux que les lois de l'électricité [1906, 193]. Autrement dit, une philosophie de la géométrie fondée sur le mouvement libre des corps solides perdait son intérêt si toutes les forces étaient d'origine électromagnétique.

Moins d'un an après la parution du livre de Wellstein et des commentaires de Mansion et Wilson, Poincaré présenta un choix à ses lecteurs. Ils pouvaient (1) identifier la droite avec un processus physique, tel que la propagation de la lumière, ou (2) rejeter toute définition empirique de la droite. Choisir (1) serait "stupide", observa-t-il avec une franchise inhabituelle, et cela pour deux raisons. D'abord, il prenait en compte le cas où un rayon lumineux semblait suivre une trajectoire courbe. Si on devait considérer la trajectoire comme une droite dans l'espace courbe, alors il y aurait un conflit avec une autre définition physique de la droite : l'axe de rotation d'un solide. Autrement dit, Poincaré rejetait l'option de Wellstein, selon laquelle les définitions optique (c'est-à-dire électromagnétique) et mécanique de la droite pouvaient coexister. Il rejetait également l'argument de Wilson, selon lequel les lois de l'électromagnétisme devaient déplacer les principes de la mécanique comme fondement de la géométrie. Ensuite, Poincaré douta de l'invariance temporelle du processus physique responsable du rayon lumineux[31]. La géométrie physique, en somme, restait problématique pour Poincaré ; il ne voyait pas de définition empirique satisfaisante de la droite.

Pour autant, le problème de l'espace n'occupait pas le centre d'attention mathématique ; au contraire, en tant que domaine de recherche le sujet était marginal, même par rapport à l'ensemble des travaux sur les géométries non euclidiennes et de l'hyperespace. La bibliographie de Duncan Sommerville sur la géométrie non euclidienne [1911], la plus complète disponible pour la période qui nous concerne, nous donne le moyen d'évaluer le niveau d'activité des différentes spécialités du domaine. En ce qui concerne la période 1890-1905, Sommerville fit état de 49 titres sur la cinématique ou la dynamique de l'espace non euclidien, à comparer avec plus de 2000 titres publiés pendant la même période, dans toutes les branches de la géométrie non euclidienne et de l'hyperespace. À l'évidence, les travaux d'application de la géométrie non euclidienne à la mécanique étaient ésotériques au moins jusqu'à 1905. Le nombre minuscule de publications dans cette spécialité souligne sa position marginale par rapport à l'ensemble des recherches mathématiques.

D'autres aspects de la géométrie non euclidienne attiraient l'intérêt des mathématiciens, y compris les fondements axiomatiques de la géométrie, développés en Italie par Pasch, Peano et Pieri, et ailleurs par Veblen, Hilbert, et H. Weber. Le texte de Coolidge [1909] montre qu'à la fin de la première décennie du vingtième siècle, on pouvait écrire un livre sur la géométrie non euclidienne sans parler d'applications physiques.

C'est dans cette optique axiomatique qu'on comprend une remarque de Lothar Heffter, lors d'un discours prononcé en 1911. Heffter admit volontiers que la géométrie de l'espace était déterminée par l'expérience. Mais la question de savoir si une géométrie définie de façon axiomatique était compatible avec l'espace réel, précisa-t-il, "laiss[ait] le mathématicien froid" [1911, 8].

Les fondements axiomatiques de la géométrie euclidienne ont trouvé une expression convaincante dans le livre de David Hilbert, *Grundlagen der Geometrie* [1899]. On peut connaître mieux le chemin intellectuel suivi par Hilbert avant d'écrire les *Grundlagen*, grâce aux transcriptions des cours qu'il faisait sur ce thème. En 1891, lorsque Hilbert était encore *Privatdozent* à Königsberg, il enseignait la géométrie projective, ce qui était l'occasion de faire une comparaison entre le type de connaissance représenté par la théorie des nombres, la géométrie, la mécanique ou la physique :

> The results of these domains (number theory, algebra, function theory) can be achieved by pure thinking .... Geometry, however, is completely different. I can never fathom the properties of space by mere thinking, just as little as I can recognize the basic laws of mechanics, the law of gravitation, or any other physical law in this way. Space is not a product of my thinking, but is rather given to me through my senses. Therefore I require my senses for the establishment of its properties. I require intuition and experiment, just as with the establishment of physical laws. [Traduit par Majer 1995, 263]

L'analyse pure ne pouvait pas déterminer les lois de la physique, selon Hilbert, et on ne pouvait pas connaître la géométrie de l'espace avant de prendre sa mesure. Dans les deux cas, la reconnaissance des lois impliquaient à la fois l'intuition et l'expérience. Ce point de vue sur les propriétés de l'espace et le rôle de l'intuition dans la pensée géométrique n'a pas été repris pendant la rédaction des *Grundlagen*, mais il ne semble pas que Hilbert l'ait modifié par la suite.

5 Conclusion

Au début du vingtième siècle, la doctrine de Poincaré a été jugée extrême par les géomètres qui écrivaient sur le problème de l'espace. Ce jugement leur rapprochait des physiciens comme Helmholtz, Mach et Boltzmann, pour qui la géométrie de l'espace était une question empirique. Les regards des géomètres, cependant, ne se confondaient pas avec ceux des physiciens. Les influences institutionnelles ont pu s'exercer dans ce cas, parce que l'enseignement de la géométrie non euclidienne ne revenait qu'aux mathématiciens. Ainsi Liebmann, un spécialiste des géométries non euclidiennes, trouva que la doctrine de Poincaré rendait illégitime une partie de son champ de connaissance.

Les réponses des géomètres à la doctrine de Poincaré illuminent les regards qu'ils portaient sur leur discipline, et sur la place de celle-ci par rapport aux autres disciplines. Quelques géomètres voyaient dans la théorie de l'électron un bouleversement des principes de la mécanique, sur lesquels Helmholtz et Poincaré avaient fondé chacun leur philosophie de la géométrie. Le rejet de la doctrine de Poincaré était aussi le reflet d'une préoccupation avec l'éloignement des mathématiques par rapport à la physique. Ce rejet se comprend mieux lorsqu'on le met en rapport avec la pratique des mathématiciens et les visions concurrentielles de l'avenir de leur discipline. Pour certains mathématiciens au début du siècle, l'avenir des mathématiques semblait dépendre du maintien d'un lien fondamental entre la géométrie et la physique.

La période de notre étude de la réception mathématique de la doctrine de Poincaré se termine au moment où les conceptions relativistes se banalisaient dans les revues savantes. Dans la période post-relativiste, la doctrine de Poincaré sera le objet d'une série de critiques, qu'il convient d'étudier dans leur ensemble. Or, nous avons vu qu'une théorie de l'espace n'était pas pour déplaire en général aux géomètres. D'ailleurs, en 1907, Hermann Minkowski trouva les mathématiciens "particulièrement bien prédisposés" pour améliorer la nouvelle conception de l'espace et du temps [1915, 927]. L'histoire lui donna raison, comme on sait, même si la découverte de la théorie de la relativité générale échappa aux géomètres, pour des raisons qui restent obscures. Toutefois, parmi toutes les hypothèses possibles, l'hégémonie de la doctrine conventionnaliste nous semble être des plus invraisemblables.

Remerciements. Cet essai est extrait de notre thèse (Université de Paris 7, 1996), rédigée avec le soutien d'une allocation de recherche MESR. Pour l'occasion de présenter nos recherches, nous remercions MM. G. Heinzmann et P. Nabonnand (séminaire Heidelberg-Nancy-Strasbourg d'histoire des mathématiques), D. Flament (séminaire *Histoires de géométries*), et J. Gray (colloque *Geometry and Physics*, à Milton Keynes). Nous remercions enfin MM. O. Darrigol et C. Houzel de leurs commentaires sur une version préliminaire.

Notes

[1] Einstein [1922, 33-34] ; Eddington [1920, 9] ; Hobson [1923, 147].
[2] Kline [1972, 921-2]. Voir aussi Jammer [1960, 163] ; Feuer [1982, 64] ; Henderson [1983, 16].
[3] Voir Reichenbach [1957] ; Nagel [1961] ; Vuillemin [1972], [1976] ; Grünbaum [1973] ; Sklar [1974] ; Glymour [1980] ; O'Gorman [1977] ; Giedymin [1982], [1991], [1992] ; Coffa [1986] ; Stump [1989] ; Gillies [1993] ; Heinzmann [1992], [1995] ; Greffe et al. [1996].
[4] Premier entre les partisans de la géométrie non euclidienne en France, Jules Hoüel soutenait sa diffusion intellectuelle à travers ses traductions de Lobachevsky, Riemann, Beltrami et Helmholtz, ainsi que par ses propres écrits, dans lesquels il favorisait l'interprétation physique des fondements de la géométrie ; voir Hoüel [1875].
[5] J. M. de Tilly et Jules Hoüel ont vu leurs notes rejetées par l'Académie des sciences ; voir la correspondance publiée par Barbarin [1926].
[6] Bertrand [1869], [1870]. Sur Bertrand et l'affaire Carton, voir Pont [1986, 637-660] ; Gispert [1987, 80-81] ; Zerner [1991, 312]. Les "démonstrations " du postulat des parallèles n'ont pas disparues avec Carton. Selon Barbarin [1926, 55], l'Académie a créé une commission spéciale "dite des Parallèles" pour examiner les nombreuses tentatives de démonstration.
[7] Sur le mouvement intellectuel autour de Paul Tannery et Émile Boutroux, voir Nye [1979]. Sur les réponses des philosophes de langue française à la géométrie non euclidienne, voir Panza

[1995].
[8] Helmholtz [1876, 245]. Sur la philosophie empiriste de Helmholtz, voir DiSalle [1993, 498].
[9] Poincaré [1891, 771]. Quelques-unes des idées de Poincaré sur les fondements de la géométrie se trouvent dans ses manuscrits sur les fonctions fuchsiennes, rédigés en 1880 ; voir Poincaré [1997].
[10] Selon le philosophe Ernst Cassirer, la doctrine de Poincaré aurait également gagné l'approbation des mathématiciens [1910, 142]. Son témoignage nous paraît peu fiable, d'abord parce qu'il n'était pas mathématicien, et ensuite, parce qu'il s'opposa à la doctrine [1910, 147]. La notion selon laquelle les mathématiciens suivaient Poincaré mettait en valeur cette opposition, en la rendant plus singulière qu'elle était en fait dans la communauté scientifique.
[11] Sur les manifestations de la géométrie non euclidienne et hyperspatiale en physique voir Beichler [1988] et Bork [1964].
[12] " Im Gegenteil, indem die Mathematik z. B. in der *Nicht-Euklidischen* Geometrie Grundlagen und Grundsätze schafft, die eine allgemeinere Raumanschauung darbieten, als sie durch die Wirklichkeit gegeben ist, gewährt sie sehr schätzenswerte Hilfsmittel die Sätze festzustellen, welche als Grundsätze für den wirklichen -*Euklidischen* -Raum gewählt werden müssen ". Souligné par Volkmann [1913, 360].
[13] "Nun, ich halte diese Fälle nicht für wahrscheinlich, aber es wäre möglich, daß durch Messungen von Sternen konstatiert würde, daß der Raum nicht-euklidisch ist. Es ist vollständig denkbar, daß das der Fall wäre ; dann müßte sich die Anschauung akkomodieren". Boltzmann [1990, 255].
[14] "..wird man gut tun, bei physikalischen Untersuchungen von nichteuklidischen Räumen abzusehen" [1904, 435]. En fait, comme nous l'a remarqué O. Darrigol, dans la première édition de ce livre, Föppl se montra plus tolérant envers l'idée d'un espace physique à quatre dimensions [1894, 308].
[15] Laue [1922, 23] ; Born [1956, 253].
[16] Clifford [1876]. Sur l'évolution des recherches géométriques en dynamique à la fin du siècle, voir Houzel [1992] ; Laugwitz [1996, § 3] ; Lützen [1995*a*], [1995*b*] ; Ziegler [1985].
[17] Pourtant, Poincaré observa qu'on pourrait mesurer des longueurs "à l'aide d'une ficelle" dans l'espace riemannien à deux dimensions [1902*b*, 110].
[18] Voir Gray [1982, 221], [1986, 268] ; Dieudonné [1982, 3] ; Gray et Walter [1997].
[19] Hadamard [1898, 286] ; Picard [1908, 143] et [1914, 23].
[20] Barbarin [1902, 69] ; Buhl [1911, 66] ; Laurent [1906, 40].
[21] Enriques [1910, 271 ; 1911, 6]. Sa critique a été reprise par Francesco Severi [1910, 27], et Eduard Study [1914, 117-8]. Sur les démarches d'Enriques et de Poincaré en géométrie et en physique, voir Israel [1992].
[22] Fano [1908, 281]. La doctrine de Poincaré écartait la perte de certitude, voir Poincaré [1891, 773].
[23] Klein [1902*b*, 135]. Sur le rôle de Klein dans la promotion de la géométrie et des mathématiques appliquées, voir Rowe [1989].
[24] *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung* **17**, supplément, 121 ; *Bulletin of the American Mathematical Society* **15**, 318 ; *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques* **7**, 210-211.
[25] Sur l'idéologie de l'École de Berlin, voir Rowe [1989, 190].
[26] Heffter [1937, 3]. Selon Heffter, qui attribua la remarque à un "champion réputé" des mathématiques appliquées, le dédain des mathématiciens purs envers les mathématiciens appliqués trouvait sa source dans le ressentiment, lié au fait que ceux-ci savaient quelque chose au-delà et au-dessus de ce qu'ils savaient [1911, 12].

[27] Chargé de l'expertise du célèbre "bordereau" lors de la révision du procès de Dreyfus, Poincaré s'est prononcé la même année contre l'engagement politique du savant [1904].
[28] Pour l'autoidentification, voir [1923, 609n].
[29] Timerding [1911, 42]. L'attribution d'une position unique (et centrale) aux mathématiques dans le schéma des connaissances était donc indépendante, parfois, des débats sur la nature transcendante des mathématiques, sous forme d'appels à l'harmonie préétablie entre la mathématique pure et la réalité physique.
[30] Hausdorff [1904, 1]. Les sciences concernées étaient les mathématiques, la physique, la physiologie, la psychologie et la philosophie de la connaissance (*Erkenntnistheorie*). Sur Hausdorff, le conventionnalisme linguistique et ses rapports avec le modernisme dans la communauté mathématique allemande, voir Mehrtens [1990].
[31] Poincaré [1906, 34]. Wellstein [1905, 141] a également souligné ce problème.

Bibliographie

Abraham, Max.
1912 Zur Theorie der Gravitation, *Physikalische Zeitschrift* 13, 1-4.
Abraham, Max et Föppl, August.
1904 *Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität*, 2^e^ éd., Leipzig : Teubner.
Barbarin, Paul.
1902 *La géométrie non euclidienne*, Paris : Naud.
1926 La correspondance entre Hoüel et de Tilly, *Bulletin des sciences mathématiques* 50, 50-64.
Beichler, James E.
1988 Ether/or : Hyperspace Models of the Ether in America, in *The Michelson Era in American Science 1870-1930*, Stanley Goldberg et Roger H. Stuewer, éds., New York : American Institute of Physics, 206-223.
Bertrand, Joseph.
1869 Sur la somme des angles d'un triangle, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* 69, 1265-1269.
1870 Sur la démonstration relative à la somme des angles d'un triangle, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* 70, 17-20.
Boi, Luciano et Flament, Dominique, éds.
1992 *1830-1930, A Century of Geometry : Epistemology, History and Mathematics*, Berlin : Springer-Verlag.
Boltzmann, Ludwig.
1990 *Principien der Naturfilosofi*, Ilse M. Fasol-Boltzmann, éd., Berlin : Springer-Verlag.
Bolyai, János.
1867 *La science absolue de l'espace indépendante de la vérité ou de la fausseté de l'Axiome XI d'Euclide (que l'on ne pourra jamais établir à priori)*, Paris : Gauthier-Villars.
Bork, Alfred M.
1964 The Fourth Dimension in Nineteenth-Century Physics, *Isis* 55, 326-338.
Born, Max.
1956 Physics and Relativity, *Helvetica Physica Acta*, Supplementum 4, 244-260.
Boucher, Maurice.
1905 *Essai sur l'hyperespace : le temps, la matière et l'énergie*, 2^e^ éd., Paris : Alcan.
Buhl, Adolphe.
1911 Géométrie et psychologie, in H. Laurent, *Sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres*, Paris : Gauthier-Villars, 62-66.

Cassirer, Ernst.
1910 *Substanzbegriff und Funktionsbegriff : Unterschungen über die Grundfragen der Erkenntniskritik*, Berlin : Verlag von Bruno Cassirer.
Clifford, William Kingdon.
1876 On the Space Theory of Matter, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 2, 157-158.
Coffa, J. Alberto.
1986 From Geometry to Tolerance : Sources of Conventionalism in Nineteenth-Century Geometry, in *From Quarks to Quasars*, Robert G. Colodny, éd., Pittsburgh : University of Pittsburgh Press, 3-70.
1991 *The Semantic Tradition from Kant to Carnap, to the Vienna Station*. Linda Wessels, éd., Cambridge : Cambridge University Press.
Coolidge, Julian Lowell.
1909 *The Elements of Non-Euclidean Geometry*, Oxford : Clarendon.
Darboux, Gaston.
1889 *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*, tome 2, Paris : Gauthier-Villars.
Darrigol, Olivier.
1996 The Electrodynamic Origins of Relativity Theory, *Historical Studies in the Physical and Biological Sciences* 26, 241-312.
Drude, Paul.
1912 *Précis d'optique*, tome 2, refondu et complété par M. Boll, Paris : Gauthier-Villars.
Dieudonné, Jean.
1982 La découverte des fonctions fuchsiennes, in *Actes du 6e congrès du groupement des mathématiciens d'expression latine*, Paris : Gauthier-Villars, 3-23.
DiSalle, Robert.
1993 Helmholtz's Empiricist Philosophy of Mathematics : Between Laws of Perception and Laws of Nature, in *Hermann von Helmholtz and the Foundations of Nineteenth-Century Science*. David Cahan, éd., Berkeley : University of California Press, 498-521.
Eddington, Arthur Stanley.
1920 *Space, Time and Gravitation : An Outline of the General Relativity Theory*, Cambridge : Cambridge University Press.
Einstein, Albert.
1922 *Sidelights on Relativity*, London : Methuen.
Enriques, Federigo.
1910 *Problemi della scienza*, 2e éd., Bologna : Zanichelli, cité selon la trad. angl. *Problems of Science*, Chicago : Open Court, 1914.
1911 Principes de la géométrie, *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées* 3 : *fondements de la géométrie*, Jules Molk, éd., Paris : Gauthier-Villars, 1-147.
Fano, Gino.
1908 La geometria non-euclidea, *Scientia* 4, 257-282.
Feuer, Lewis Samuel.
1982 *Einstein and the Generations of Science*, 2e éd., New Brunswick : Transaction.
Föppl, August Otto.
1894 *Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Elektricität*, Leipzig : Teubner.
Frank, Philipp G.
1957 *Philosophy of Science : The Link Between Science and Philosophy*, Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice-Hall.

Giedymin, Jerzy.
1982 *Science and Convention*, Oxford : Pergamon.
1991 Geometrical and Physical Conventionalism of Henri Poincaré in Epistemological Formulation, *Studies in History and Philosophy of Science* 22, 1-22.
1992 Conventionalism, the Pluralist Conception of Theories and the Nature of Interpretation, *Studies in History and Philosophy of Science* 23, 423-443.
Gillies, Donald.
1993 *Philosophy of Science in the Twentieth Century : Four Central Themes*, Oxford : Blackwell.
Gispert, Hélène.
1987 La correspondance de G. Darboux avec J. Hoüel, Chronique d'un rédacteur (déc. 1869-nov. 1871), *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques* 8, 67-202.
Glymour, Clark.
1980 *Theory and Evidence*, Princeton : Princeton University Press.
Gray, Jeremy.
1982 The Three Supplements to Poincaré's Prize Essay of 1880 on Fuchsian Functions and Differential Equations, *Archives internationales d'histoire des sciences* 32, 221-235.
1986 *Linear Differential Equations and Group Theory from Riemann to Poincaré*, Boston : Birkhäuser.
1989 *Ideas of Space : Euclidean, Non-Euclidean and Relativistic*, 2*e* éd., Oxford : Clarendon.
1994 German and Italian Algebraic Geometry, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* 36, 151-184.
Gray, Jeremy et Walter, Scott.
1997 Introduction à Poincaré (1997).
Greffe, Jean-Louis, Heinzmann, Gerhard et Lorenz, Kuno, éds.
1996 *Henri Poincaré : science et philosophie*, Berlin : Akademie Verlag.
Grünbaum, Adolf.
1973 *Philosophical Problems of Space and Time*, 2*e* éd., Dordrecht : Reidel.
Hadamard, Jacques.
1898 *Leçons de géométrie élémentaire*, tome 1, Paris : Colin.
Harman, Peter Michael.
1982 *Energy, Force and Matter : The Conceptual Development of Nineteenth-Century Physics*, Cambridge : Cambridge University Press.
Harzer, Paul.
1908 Die Sterne und der Raum, *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung* 17, 237-67.
Hausdorff, Felix.
1904 Das Raumproblem, *Annalen der Naturphilosophie* 3, 1-23.
Hawkins, Thomas.
1980 Non-Euclidean Geometry and Weierstrassian Mathematics : The Background to Killing's Work on Lie Algebras, *Historia Mathematica* 7, 289-342.
Heffter, Lothar.
1911 *Über Wesen, Wert und Reiz der Mathematik*, Kiel : Univ. Kiel.
1937 *Mein Lebensweg und Meine mathematische Arbeit*, Leipzig : Teubner.
Heinzmann, Gerhard.
1992 Helmholtz and Poincaré's Considerations on the Genesis of Geometry, in Boi et Flament (1992), 245-249.

1995 *Zwischen Objektkonstruktion und Strukturanalyse*, Göttingen : Vandenhoeck & Ruprecht.
Helmholtz, Hermann.
1866 Ueber die Thatsächlichen Grundlagen der Geometrie, *Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins* 4, 197-202.
1876 Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome, in *Populäre wissenschaftliche Vorträge*, vol. 3, Braunschweig : Vieweg, 23-54.
Henderson, Linda Dalrymple.
1983 *The Fourth Dimension and Non-Euclidean Geometry in Modern Art*, Princeton : Princeton University Press.
Hertz, Heinrich.
1894 *Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zussamenhänge dargestellt*, Leipzig : J. A. Barth.
Hilbert, David.
1899 *Die Grundlagen der Geometrie*, Leipzig : Teubner.
1905 Über die Grundlagen der Logik und Arithmetik, *in Verhandlungen des 3. internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg*, Leipzig ; rééd. in Hilbert [1899], 4*e* éd., 1913.
Hobson, Ernest William.
1923 *The Domain of Natural Science*, Cambridge : Cambridge University Press.
Hoüel, Jules.
1875 *Du rôle de l'expérience dans les sciences exactes*, Prague : Éd. Grègr.
Houzel, Christian.
1991 Histoire de la théorie des parallèles, in *Mathématiques et philosophie de l'antiquité à l'âge classique*, Roshdi Rashed, éd., Paris : Centre National de la Recherche Scientifique, 163-179.
1992 The Birth of Non-Euclidean Geometry, in Boi et Flament (1992), 3-21.
Israel, Giorgio.
1992 Poincaré et Enriques : deux points de vue différents sur les relations entre géométrie, mécanique et physique, in Boi et Flament (1992), 107-26.
Jammer, Max.
1960 *Concepts of Space*, New York : Harper.
Klein, Felix.
1890 Zur Nicht-Euklidischen Geometrie, *Mathematische Annalen* 37, 544-572 ; *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, 1, 353-383.
1893 *Nicht-Euklidische Geometrie*, 2*e* éd., Göttingen, autogr.
1894 Riemann und seine Bedeutung in der Entwicklung der modernen Mathematik, *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung* 4, 72-82.
1902*a* *Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. Eine Revision der Prinzipien*, Leipzig : Teubner.
1902*b* Über den mathematischen Unterricht an der höheren Schulen, *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung* 11, 128-141.
1907 *Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen*, Leipzig : Teubner.
Kline, Morris.
1972 *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times*, Oxford : Oxford University Press.
Koenigsberger, Leo.
1913 *Die Mathematik eine Geistes- oder Naturwissenschaft ?*, Heidelberg : Carl Winter.

Laisant, C.-A.
1911 Préface à G.-B. Halsted, *Géométrie rationnelle*, trad. Paul Barbarin, Paris : Gauthier-Villars, 1911, i-iii.
von Laue, Max.
1922 Die Relativitätstheorie in der Physik, *Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte*, 45-57. Réimprimé in von Laue (1961), vol. 2, 13-25.
1961 *Gesammelte Schriften und Vorträge*, 3 vols., M. Kohler, éd., Braunschweig : Vieweg.
Laugwitz, Detlef.
1996 *Bernhard Riemann 1826-1866 : Wendepunkt in der Auffassung der Mathematik*, Basel : Birkhäuser.
Laurent, Hermann.
1906 *La géométrie analytique générale*, Paris : Hermann.
De La Vallée Poussin, Charles.
1908 L'objet de la démonstration mathématique et la réalité, *Bulletins de l'Académie royale de Belgique,* 1131-1156.
1923 Le Temps et la Relativité restreinte, *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 569-611.
Liebmann, Heinrich.
1905 *Nichteuklidische Geometrie*, Leipzig : Göschen.
1911 Nichteuklidische Geometrie, *Taschenbuch für Mathematiker und Physiker* 2, 168-172.
Lindsay, R. Bruce.
1963 Transcript of Oral History Interview with Edwin Bidwell Wilson, *Archives for History of Quantum Physics*, Philadelphia : American Philosophical Society.
Lützen, Jesper.
1995*a* Interactions between Mechanics and Differential Geometry in the 19th Century, *Archive for History of Exact Sciences* 49, 1-72.
1995*b* Renouncing Forces ; Geometrizing Mechanics : Hertz's *Principles of Mechanics*, Københavns Universitet Matematisk Institut, *Preprints* 22, 1-93.
Mach, Ernst.
1906 *Space and Geometry*, La Salle : Open Court.
Majer, Ulrich.
1995 Geometry, Intuition and Experience from Kant to Husserl, *Erkenntnis* 42, 261-285.
Mansion, Paul.
1905 Sur les principes de la géométrie, *Mathesis* 25, supplément, 1-5.
Mehrtens, Herbert.
1990 *Moderne - Sprache - Mathematik*, Frankfurt am Main : Suhrkamp.
Minkowski, Hermann.
1915 Das Relativitätsprinzip, *Annalen der Physik* 47, 927-938.
Nagel, Ernest.
1961 *The Structure of Science : Problems in the Logic of Scientific Explanation*, New York : Harcourt, Brace & World.
Nowak, Gregory.
1989 Riemann's *Habilitationsvortrag* and the Synthetic A Priori Status of Geometry, in *The History of Modern Mathematics*, vol. 1. David Rowe et John McCleary, éds., Boston : Academic Press, 17-48.
Nye, Mary Jo.

1979 The Boutroux Circle and Poincaré's Conventionalism, *Journal for the History of Ideas* 40, 107-120.
O'Gorman, F. P.
1977 Poincaré's Conventionalism of Applied Geometry, *Studies in History and Philosophy of Science* 8, 301-340.
Panza, Marco.
1995 L'intuition et l'évidence. La philosophie kantienne et les géométries non euclidiennes : relecture d'une discussion, in *Les savants et l'épistémologie vers la fin du XIX*e *siècle*. Jean-Claude Pont et Marco Panza, éds., Paris : Blanchard, 39-87.
Picard, Émile.
1893 *Traité d'analyse*, tome 2, Paris : Gauthier-Villars.
1908 De la science, *Revue du mois* 5, 129-148.
1911 Quelques réflexions sur la science et les savants, in *Hommage à Louis Olivier*, Paris.
1914 *La science moderne et son état actuel*, 2e éd., Paris : Flammarion.
Poincaré, Henri.
1887 Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie, *Bulletin de la société mathématique de France* 15, 203-216.
1891 Les géométries non euclidiennes, *Revue générale des sciences pures et appliquées* 2, 769-774.
1897 Sur les rapports de l'analyse pure et de la physique mathématique, *Acta mathematica* 21, 331-341.
1898 La mesure du temps, *Revue de métaphysique et de morale* 6, 1-13.
1902*a* *La science et l'hypothèse*, Paris : Flammarion, cité selon la réédition de 1968.
1902*b* Les fondements de la géométrie, *Bulletin des sciences mathématiques* 26, 249-272 ; *Œuvres*, tome XI, 92-113.
1904 Sur la participation des savants à la politique, *Revue bleu* 1, 708.
1906 Les mathématiques et la logique (suite et fin), *Revue de métaphysique et de morale* 14, 17-34, 294-317.
1916-56 *Œuvres*, 11 tomes, Paris : Gauthier-Villars.
1997 *Trois suppléments sur la découverte des fonctions fuchsiennes*, Jeremy Gray et Scott Walter, éds., Berlin : Akademie Verlag.
Pont, Jean-Claude.
1986 *L'aventure des parallèles*, Bern : Peter Lang.
Reichenbach, Hans.
1957 *The Philosophy of Space and Time*, New York : Dover Publications.
Riemann, Bernhard.
1867 Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* 13, 132-152 ; *Gesammelte mathematische Werke und wissentschaftlicher Nachlaß*, 2e éd., 272-287.
Rowe, David.
1989 Klein, Hilbert, and the Göttingen Mathematical Tradition, *Osiris* 5, 186-213.
Severi, Francesco.
1910 Ipotesi e realtà nelle scienze geometriche, *Scientia* 8, 1-29.
Sklar, Lawrence.
1974 *Space, Time and Spacetime*, Berkeley : University of California.
Sommerville, Duncan M'Laren Young.
1911 *Bibliography of Non-Euclidean Geometry*, London : Harrison.
Stallo, John Bernard.

1890 *The Concepts and Theories of Modern Physics*, 3^e éd., London : Kegan Paul & Co.
Study, Eduard.
1914 *Die realistische Weltansicht und die Lehre vom Raume*, Braunschweig : Vieweg.
Stump, David.
1989 Henri Poincaré's Philosophy of Science, *Studies in History and Philosophy of Science* 20, 335-363.
Tannery, Paul.
1876 La géométrie imaginaire et la notion d'espace, *Revue philosophique de la France et de l'étranger* 2, 433-451 ; 3, 1877, 553-575.
1903 La science et l'hypothèse d'après M. H. Poincaré, *Annales de philosophie chrétienne* 2, 241-255. Réédition in Tannery (1927), 377-399.
1927 *Mémoires scientifiques*, tome 8, Paris : Gauthier-Villars.
Tazzioli, Rossana.
1993 Ether and Theory of Elasticity in Beltrami's Work, *Archive for History of Exact Sciences* 45, 1-37.
Timerding, Heinrich Emil.
1911 L'enseignement mathématique théorique et pratique destiné aux étudiants en sciences physiques et naturelles, *L'Enseignement mathématique* 13, 481-490.
Torretti, Roberto.
1984 *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*, 2^e éd., Dordrecht : Reidel.
Volkmann, Paul.
1913 *Einführung in das Studium der theoretischen Physik*, Leipzig : Teubner.
Vuillemin, Jules.
1972 Poincaré's Philosophy of Space, *Synthese* 24, 161-79.
1976 Conventionalisme géométrique et théorie des espaces à courbure constante, in *Science et métaphysique* , Bruxelles : Office internationale de librairie, 65-105.
Wellstein, Josef.
1905 Grundlagen der Geometrie, in *Encyklopädie der Elementar-Mathematik*, vol. 2, *Encyklopädie der elementaren Geometrie*, Heinrich Weber et J. Wellstein, éds., Leipzig : Teubner, 3-301.
Wilson, Edwin Bidwell.
1906 The Foundations of Science, *Bulletin of the American Mathematical Society* 12, 187-193.
Woods, Frederick Shenstone.
1905 Forms of Non-Euclidean Space, in *The Boston Colloquium : Lectures on Mathematics*, New York : Macmillan, 31-74.
Zerner, Martin.
1991 La règne de Joseph Bertrand (1874-1900), *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences* 34, 296-322.
Ziegler, Renatus.
1985 *Die Geschichte der geometrischen Mechanik im 19. Jahrhundert*, Stuttgart : Franz Steiner Verlag.