

## Poincaré à Boussinesq

[Ca. 02.1882]

Monsieur et cher collègue,

La lecture de votre note m'a vivement intéressé, car vous avez contribué par le théorème que vous énoncez à éclaircir un des points les plus obscures du calcul intégral.<sup>1</sup> Est-ce à dire que vous ayez dit le dernier mot et que cette question n'ait pas besoin d'être encore approfondie davantage et que votre théorème ne puisse être précisé? Je ne le crois pas et sans doute vous ne le croyez pas non plus. Voici quelques points sur lesquels je vous demanderai la permission d'appeler votre attention.

Prenons d'abord la définition des intégrales asymptotes; nous allons voir surgir certaines difficultés. Vous prenez l'équation :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

dont l'int. gén. est  $\varphi(x, t) = C$ . Qu'est-ce qu'une intégrale asympt. Pour une valeur de  $t$  et pour les valeurs plus grandes,  $x$  diffère aussi peu que l'on veut pour une inf. d'intégr. pour des valeurs de  $C$  qui ne sont pas d'ailleurs infiniment voisines les unes des autres.



Ainsi si  $AB$  est une intégrale asymptote, les autres intégrales  $A'B'$ ,  $A''B''$  se rapprochent asymptotiquement de  $AB$  quand  $t$  tend vers l'infini. Mais alors  $A'B'$  et  $A''B''$  se rapprochent asympt. l'une de l'autre.  $A'B'$  rentrerait donc dans la définition des int. asympt.

A ce compte toutes les intégrales seraient asymptotes. Ainsi si on a les courbes

$$xy = \text{const.}$$

Toutes les hyperboles qu'elles représentent sont asymptotes les unes aux autres. Les *véritables* intégrales asymptotes n'ont-elles donc pas une propriété qui les définit? Évidemment oui; mais il faudrait la trouver. Ainsi dans certains cas, les vraies int. asympt. seront des courbes fermées; dans d'autres ce seront celles qui iront passer par certains points singuliers, etc. Cette incertitude dans la définition sera difficile à lever. Nous savons bien l'un et l'autre ce que nous entendons par intégr. asympt. mais il nous serait difficile de le dire.<sup>2</sup> Cette incertitude se reflète dans la règle que vous donnez et que vos recherches ultérieures vous amèneront sans doute à préciser davantage.

Mettons l'éq. sous la forme générale

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} \quad \text{intégr. génér. } f(x, y) = C,$$

le facteur d'intégr.  $z$  est donné par l'équation

$$X \frac{dz}{dx} + Y \frac{dz}{dy} + z \left( \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} \right) = 0. \quad (1)$$

Mais cette équation a une infinité d'intégrales comprises dans la formule

$$z\Phi(f) \quad (2)$$

$\Phi$  étant une fonction arbitraire de  $f(x, y)$ .

Soit

$$\Phi = \frac{1}{f(x, y) - \alpha} \quad (\alpha \text{ étant quelconque})$$

En égalant (2) à l'infini, on trouvera  $f(x, y) = \alpha$ . C'est-à-dire une intégrale quelconque. Aussi quand on cherche les intégr. asympt. (les véritables) n'est-il pas indifférent de choisir telle ou telle des intégrales de l'équation (1). Voici comment je faisais dans les exemples dont vous avez bien voulu parler dans votre note :

Je suppose que  $X$  et  $Y$  soient entiers en  $x$  et  $y$  et que pour

$$x = y = 0$$

on ait

$$X = Y = 0.$$

J'ai démontré que l'équation (1) admet une intégrale qui se développe suivant les puissances croissantes de  $x$  et de  $y$  quand ces variables sont assez petites, et qu'elle n'en admet qu'une. C'est cette intégrale que j'égalais à l'infini pour obtenir les int. asympt. ou plutôt l'une d'entre elles.

Laissez-moi vous dire de nouveau combien votre note m'a intéressé et combien ce problème dont vous avez commencé la solution me paraît difficile et important.

Veuillez agréer, Monsieur et Cher Collègue, l'assurance de ma haute estime et de mes sentiments dévoués,

Poincaré

**ALS 4p. MS 4229, 256, Bibliothèque de l'Institut de France. Transcrite dans Poincaré (1986, 83–85).**

<sup>1</sup>Boussinesq (1882), note présentée à l'Académie des sciences par Saint-Venant le 30.01.1882. Il démontre le théorème selon lequel les équations linéaires n'admettent pas plus d'intégrales asymptotes distinctes que de solutions singulières.

<sup>2</sup>Boussinesq (1882, 208) définit les intégrales asymptotes d'une équation différentielle  $x' = f(t, x)$  comme celles qui, "pour une valeur donnée quelconque de  $t$  et pour toutes les valeurs, ou plus grandes, ou plus petites, la fonction  $x$  y diffère aussi peu qu'on veut de ce qu'elle est dans d'autres intégrales, très distinctes pourtant de celle-là, c'est-à-dire s'en écartant notablement pour les valeurs de  $t$  qui sont, au contraire, ou plus petites ou plus grandes que la valeur donnée."

# Bibliographie

- Boussinesq, J. V. Sur les intégrales asymptotes des équations différentielles. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* 94 (1882) : 208–210.
- Poincaré, H. La correspondance d'Henri Poincaré avec des mathématiciens de A à H. *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques* 7 (1986) : 59–219.