La réception des *Vorlesungen über neure Geometrie* de Pasch par Peano

Sébastien Gandon
(Université Clermont II - PHIER)

Peano publie en 1888 son *Calcolo Geometrico*, point culminant d'une réflexion inaugurée en 1882, sur le calcul géométrique (principalement, sur l'œuvre de Grassmann). En 1889, il rédige *I Principii di Geometria*, où la méthode algébrique disparaît au profit d'une démarche axiomatique, empruntée à Pasch. Dans la suite de son œuvre, Peano continuera de développer ces deux approches, sans les mêler, mais en privilégiant nettement la seconde par rapport à la première. Quelle signification accordée à cette brusque apparition de l'axiomatisation en géométrie, due à la lecture des *Vorlesungen* de Pasch ? Comment concevoir le rapport entre les deux entreprises de formalisation que constituent le calcul et l'axiomatique ?
Notre thèse est que, s'il y a, d'un point de vue épistémologique une profonde différence entre les deux méthodes, il reste que la lecture que Peano, dans *I Principii*, effectue de l'œuvre de Pasch est tributaire de son engagement dans la tradition du calcul géométrique. Pour le dire autrement, il nous semble que, chez Peano, l'héritage grassmannien joue un rôle *indirect* dans l'émergence du point de vue abstrait, « hilbertien », que lui et ses disciples développeront par la suite.

Le calcul géométrique est toujours défini chez Peano par le biais d'une analogie : la nouvelle algèbre est aux grandeurs spatiales ce que l'algèbre ordinaire est aux nombres. Ainsi écrit-il dans la préface de son *Calcolo* :

> De manière générale, le calcul géométrique consiste en un système d'opérations […] sur les entités géométriques, analogue [*analoghe*] à celui que l'algèbre déploie concernant les nombres. […]Le calcul géométrique présente une analogie [*presenta analogia*] avec la géométrie analytique ; mais il en diffère en ce que, alors que dans la géométrie analytique, les calculs sont faits sur des nombres qui déterminent des entités géométriques, dans cette nouvelle science les calculs sont faits directement sur les entités géométriques elles-mêmes. [*Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann* 1888, p. 3]

Le projet peanien repose donc complètement sur la distinction ontologique, première, entre grandeurs géométriques et nombres. L'algèbre ordinaire, parfaitement adaptée aux grandeurs numériques, s'ajuste mal aux spécificités, considérées comme données, d'un autre type d'objet, les grandeurs spatiales. L'élaboration d'un nouveau calcul, reflétant dans ses règles d'usage, leurs singularités, permet de combler ce manque – notamment de simplifier l'application des algorithmes différentiels aux grandeurs géométriques.
Le modèle du calcul est donc celui du *reflet* dans le symbolisme d'une réalité *donnée par ailleurs*. La construction du formalisme dépend donc complètement d'une analyse ontologique préalable, et le calcul est intrinsèquement lié à un type d'application. Au contraire, dans l'axiomatique de *I Principii*, le système ne possède *aucune interprétation privilégiée* et les postulats *sont indifféremment applicables* à tout ce à quoi ils peuvent être sans contradiction appliqués. Certes, l'approche de Peano n'est, en 1889, pas encore celle de Hilbert. Mais le mathématicien déploie déjà des preuves d'indépendance, où il fait volontairement varier les interprétations de ces symboles.
Le lien entre la démarche algébrique du *Calcolo* et celle, axiomatique, de *I principii* n'est donc pas direct. En un certain sens, les deux projets sont mêmes diamétralement *opposés*. Le

calcul géométrique vise à refléter les structures fondamentales d'un certain type d'entités, les grandeurs géométriques, conçues comme données. L'axiomatisation définit, elle, à l'aide des seules postulats un ensemble de modèles. Loin d'être à la remorque de l'ontologie, l'entreprise de formalisation est déjà, en 1889 chez Peano, libre et souveraine.

Pour pouvoir ressaisir de façon plus profonde l'articulation entre calcul et axiomatisation de la géométrie, il faut tourner son regard, non plus vers les méthodes, mais vers le contenu de *I principii*. Dans son article, Peano offre une traduction dans un symbolisme « logique » de l'axiomatique que Pasch formule en langue vernaculaire au dans ses *Vorlesungen über neure geometrie* (1882). La géométrie « élémentaire » que le mathématicien allemand développe dans les deux premiers paragraphes de son ouvrage est une géométrie non métrique, censée reflétée les traits les plus généraux de l'espace empirique. Elle comprend trois indéfinissables (les points, les segments limités et les surfaces planes limitées), des axiomes d'incidence et d'ordre. Peano, s'il reconnaît dans *I principii* sa dette envers Pasch, souligne les avantages offerts par sa reformulation logique : sa traduction permet d'éliminer certaines ambiguïtés dont Pasch n'a pas su se débarrasser ; elle rend possible une analyse des relations logiques entre les postulats (une démonstration de leur indépendance) ; elle permet enfin une diminution du nombre de termes primitifs (Peano définit le plan en terme de points, et de segments).
Selon nous, l'essentiel est cependant ailleurs. La véritable originalité de Peano consiste à lire Pasch comme un continuateur de Grassmann. Le mathématicien italien interprète en effet les concepts fondamentaux de la géométrie « élémentaire » comme des « *opérations* » *particulières sur des grandeurs spatiales*. Ainsi, si *AB*, chez Pasch, désigne le segment d'extrémité *A* et *B* (c'est-à-dire pour l'empiriste qu'il est : une entité observable), le symbole *AB* désigne, chez Peano, le résultat d'un nouveau genre de multiplication dont les règles d'usage sont fixés par les postulats. Ce point de vue se dégage très clairement des paragraphes deux et trois de *I principii* : Peano y définit l'« opération » *hk* dont les « terme-extrémités » *h* et *k* sont des ensembles de points ; il énonce des règles de priorité permettant d'interpréter un « produit » de plus de deux termes (*abc* représente l'ensemble des segments d'extrémité *a* et *x*, *x* étant un point du segment *bc*) ; il introduit le signe d'apostrophe « ' » pour représenter sous la forme d'un produit l'opération géométrique de prolongement d'un segment (*a'b* est la demi-droite d'extrémité *b* ne contenant pas *a* ; *ab'* la demi-droite d'extrémité *a* ne contenant pas *b*) ; enfin, Peano montre que l'ensemble de ces « produits » (*hk*, *hk'* et *h'k*) sont distributifs par rapport à l'union ensembliste, qu'ils admettent un élément neutre (la figure « vide »), et qu'ils sont compatibles avec la relation d'ordre partiel d'inclusion.
Cette interprétation *spontanément calculatoire* du début des *Vorlesungen* éloigne, sans qu'il s'en aperçoive, Peano de la perspective, empiriste, qui était celle de Pasch. Contrairement à ce que le maître de Turin prétend, la traduction offerte dans *I Principii* transforme complètement le sens et la portée des dispositifs mis en place dans les *Vorlesungen*. Pasch cherche à montrer qu'une épistémologie empiriste est compatible avec l'admission d'une pluralité de géométries ; les différentes géométries (qu'elles soient projective ou métriques) sont ainsi présentées comme le développement d'un noyau théorique neutre et pauvre, la géométrie élémentaire, décrivant les traits les plus généraux de notre expérience de l'espace. Dans *I principii*, cette question du rapport entre la géométrie et l'expérience *n'est absolument plus à l'ordre du jour*. La lecture spontanément grassmannienne des *Vorlesungen* dégage le texte de Pasch de son socle problématique, et l'installe dans une perspective nouvelle : celle du calcul géométrique et de *l'exploration des possibilités opératoires* offertes par la nouvelle algèbre.

Peano recense ainsi systématiquement les ressources combinatoire de son nouveau calcul – il se demande par exemple, dans le plus pur style des « algèbres géométriques », comment exprimer un plan à partir de trois points non colinéaires, comment écrire une enveloppe convexe sous la forme d'un produit de *n* points, comment représenter le parallélisme entre demi-droites en terme de ces produits. Le problème du rapport de la géométrie à l'expérience laisse ainsi la place, dans le texte de Peano, à l'analyse des ressources expressive d'un langage conçu comme un calcul.

Peu de textes sont à la fois si proches et si éloignés que le début des *Vorlesungen* et de *I Principii*. Si Peano suit de très près la démarche de Pasch, il l'insère dans le cadre d'une tradition, celle du calcul géométrique, qui lui est complètement étrangère.
Un thème masque, chez Peano, l'hétérogénéité de ses sources d'inspiration (Grassmann, Pasch) : celui, purement négatif, de la critique du langage ordinaire et de ses ambiguïtés. Cette critique, précisément parce qu'elle est négative et indéterminée, est, semble-t-il, ce qui permet chez Peano de combiner, de façon lâche et non réfléchie, des pratiques distinctes.
Et d'un point de vue méthodologique, il nous semble important de souligner que c'est dans ce qu'elle a de vague que la référence au langage joue ici un rôle scientifique de premier plan. S'il convient en effet, lorsque l'on analyse un texte mathématique du passé, de distinguer les divers paradigmes recouverts par l'usage d'une même terminologie, il faut également veiller à ne pas figer ces modèles sur eux-mêmes, et, pour cela, reconnaître que les modes de présentation commodes, rhétoriques, souples, très souvent critiqués, possèdent parfois une vertu importante. Ainsi, le mot d'ordre (le slogan ?) peanien « remplacer la langue ordinaire par la langue logique » permet de faire coexister, au sein d'un même article, diverses traditions (celle du calcul et celle, euclidienne, des *Vorlesungen*) et d'ouvrir vers de nouvelles pratiques.