L'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) + f(y)$ — interactions avec la géométrie axiomatique et la théorie des espaces vectoriels

Ralf Krömer, Leibniz-Archiv Hannover

11 novembre 2005

Parmi les interactions de l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) + f(y)$ avec la géométrie, sont étudiés de plus près les travaux sur la règle du parallelogramme par Darboux, Schimmack, et Hamel. Tandis que Gregory Moore, qui a déjà écrite cette histoire en quelques lignes dans [Moore 1995], s'est intéressé surtout à la relation entre l'équation et le développement du concept d'espace vectoriel, on essaie ici plutôt de considérer les relations entre l'étude de l'équation et le développement du concept général de fonction. Vu la discussion vaste du 19ième siècle sur ce concept, cette perspective méthodologique est parfaitement justifiée dans le contexte d'une équation fonctionnelle. Celà conduit à inclure aussi un texte de Pincherlé qui fait usage de l'équation d'une autre manière que les autres auteurs et qui discute dans son introduction les différentes voies que le développement du concept de fonction a prises au 19ième siècle. En particulier, Pincherlé souligne la différence d'orientation de « la théorie des fonctions de variables réelles au sens de Dirichlet, où la dépendance entre la fonction et ses arguments est tout-à-fait arbitraire » d'une part et « la théorie des fonctions analytiques, où la nature arithmétique de cette dépendance a, au contraire, la plus grande importance » d'autre part [Pincherlé 1897, 326]. La tension entre ces deux façons d'étudier les fonctions va nous servir comme orientation méthodologique.

1 Le travail de Darboux sur la composition des forces

Selon Darboux [Darboux 1875], le projet de Daniel Bernoulli consistait à donner une démonstration *géométrique* de la loi de la composition des forces en statique (où « géométrique » semble vouloir dire ne reposant pas sur l'expérience). Darboux conclut sa critique de la démonstration présentée par Bernoulli avec la remarque « sa démonstration n'est pas aussi géométrique qu'il le suppose ». Pour Darboux, il s'agit de déterminer des axiomes qui permettent de déduire la loi du parallelogramme.

Entre autres, Darboux veut établir un théorème qui concerne la direction de la résultante ; ce théorème fait intervenir une fonction ϕ qui sera soumis à l'équation fonctionnelle[1] (la distributivité est nécessitée par le cas des forces collinéaires). Darboux se met à discuter la solution de cette équation. La solution supposant ϕ continue a été donné par Cauchy dans le *Cours d'analyse*[2]. Darboux donne des conditions plus faibles sous lesquelles la même solution est toujours la seule solution.

Darboux définit ϕ d'abord comme une fonction qui prend des vecteurs comme argument et qui donne un nombre comme valeur. Mais il n'est pas complètement cohérent par rapport à cela. Dans la suite, il va presque aussi souvent parler de ϕ en tant que fonction de la longueur des vecteurs.

2 Schimmack

Schimmack critique le traitement de la règle du parallelogramme par Darboux : « Die letzten Untersuchungen über das Beweisproblem des Satzes vom Kräfteparallelogramm, welche Darboux und F. Siacci veröffentlicht haben, können nicht als abschliessend angesehen werden [...] » [Schimmack 1903, 317] La critique principale que Schimmack porte sur le travail de Darboux[3] sur la composition des forces est que ce dernier ne va pas jusqu'au bout dans la méthode axiomatique. La méthode axiomatique de Schimmack adoptée dans son travail plus complet [Schimmack 1908, 19f] est marquée des *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert [Hilbert 1899] ; il s'intéresse beaucoup à l'indépendance logique et plus particulièrement à la notion de « successivité » qui est discutée au cours du développement d'une théorie de la démonstration (ou plutôt de la démontrabilité) très particulière. Il serait intéressant de voir si Schimmack ici était influencé par la théorie de la démonstration Hilbertienne dont les premiers pas étaient faits lors du congrès international des mathématiciens de Heidelberg 1904. De toute façon, la notion de deductibilité à Schimmack n'est pas encore formelle. Schimmack utilise ses concepts concernant la démontrabilité pour l'analyse des démonstrations de Darboux et Siacci.

Schimmack traite également de l'équation fonctionnelle mentionné ; il introduit bien ϕ comme fonction de la *Grösse* (longueur) du vecteur. Déja dans [Schimmack 1903, 321], il va au-delà de Darboux en ce qui concerne la continuité. Il dit qu'on peut donner une fonction ϕ non continue pour chaque ensemble dénombrable d'arguments (on y reviendra plus loin). Du point de vue axiomatique, l'équation sert, dans le contexte du problème des vecteurs, à établir l'indépendance de l'axiome de continuité (cette indépendance est équivalente à l'existence de solutions non-continues.

[1]Darboux utilise l'équation également dans un travail sur le théorème fondamental de la géométrie projective, non discuté ici (voir [Darboux 1880]).

[2][Cauchy 1821]. Dans l'édition de 1821, voir p.103-113 ; dans les *Œuvres complètes* de 1897, voir la 2ième série tome 3, p.98-105.

[3]Le travail de Siacci n'est pas discuté ici.

3 Hamel

Dans [Hamel 1905], Hamel construit une solution non-continue à l'aide de ce qu'on appelle aujourd'hui une base de Hamel de $\mathbb{R}$ considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ (utilisant le théorème de bon ordre). Hamel est, après Schimmack, un deuxième exposant de l'école Hilbertienne qui, lui, va s'investir parmi les premiers dans l'évaluation du travail de Zermelo [Zermelo 1904] sur l'axiome du choix.

Mais d'où vient l'idée d'opérer par le bon ordre dans le contexte des solutions non-continues de notre équation ? En fait, [Schimmack 1908, 17ff] parle d'une tentative par Volpi de donner une solution non-continue, apparue en 1897 (Giornale di mat. 35, 104-111) qui peut avoir donné lieu à l'idée. Hamel ne mentionne pas Volpi dans [Hamel 1905] ; j'ignore s'il le fait dans [Hamel 1903]. De toute façon, il s'agit de la ligne de pensée suivante : Volpi a essayé de construire une solution non-continue en définissant la fonction de manière variable, plus précisément en donnant une définition pour les arguments qui disposent d'une représentation en tant que combinaison linéaire rationnelle par rapport à un ensemble *fini* de nombres, et une autre définition pour les autres arguments. Schimmack trouve une erreur dans la démonstration de Volpi mais essaye de sauver l'argument en le modifiant. Dans [Schimmack 1903, 321], Schimmack dit qu'on peut donner une fonction ϕ non continue pour chaque ensemble dénombrable d'arguments ; démonstration [Schimmack 1908, 19f]. Schimmack considère donc des ensembles *dénombrables* d'arguments (qui admettent automatiquement un bon ordre). Hamel procède de la même manière en s'appuyant sur le théorème de bon ordre.

Ce qui était important pour Hamel, c'est qu'il y a seulement un nombre fini de coordonnées non-nulles, à cause de la définition de $f(x)$ par la représentation de x par rapport à la base, et pour pouvoir changer l'ordre dans la somme définissant la représentation de $x + y$. Plus tard, Schauder a étudié des bases sans cette condition en la théorie des espaces normés [Schauder 1927]. Le rôle des bases de Hamel dans l'histoire de la théorie de la mesure est étudiée dans [Moore 1995].

La solution, bien qu'une fonction dans le sens de Dirichlet, « remplit le plan » dans un certain sens. L'idée de déterminer une fonction par l'ensemble de ses valeurs interagit ici avec des propriétés algébriques (équation fonctionnelle, représentation par rapport à la base).

4 Pincherlé

Pincherlé dans [Pincherlé 1897, 327] se trouve dans la tradition de l'école italienne de l'analyse fonctionnelle ; il mentionne explicitement les travaux de Volterra et Peano. Il essaie de classifier les operateurs (qui prennent des fonctions comme arguments) d'une manière semblable à celle employée dans la classification des fonctions mêmes. Il considère comme les plus simples fonctions celles ayant la propriété distributive, c'est-à-dire obéissant à l'équation. Par conséquent, il affirme que les opérateurs ayant cette propriété sont de leur tour les plus simples parmi les opérateurs. Il mentionne un résultat de [Darboux 1880, 55] concernant l'équation, mais sinon omet la litérature la concernant.

Références

Cauchy, Augustin Louis. 1821. *Cours d'analyse.* Œuvres 2ième série tome 3 (1897).

Darboux, Gaston. 1875. "Sur la composition des forces en statique." *Bulletin des sciences mathématiques* 9 :281–288.

———. 1880. "Sur le théorème fondamental de la géométrie projective." *Math. Ann.* 17 :55–61.

Hamel, Georg. 1903. "Über die Zusammensetzung von Vektoren." *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 49 :362–371.

———. 1905. "Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$." *Math. Ann.* 60 :459–462.

Hilbert, David. 1899. "Grundlagen der Geometrie." In *Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss–Weber–Denkmals in Göttingen*, 1–99. Leipzig : Teubner.

Moore, Gregory H. 1995. "The Axiomatization of Linear Algebra : 1875–1940." *Hist. Math.* 22 :262–303.

Pincherlé, Salvatore. 1897. "Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif." *Math. Ann.* 49 :325–382.

Schauder, Julius. 1927. "Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen." *Math. Zeitschrift* 26 :47–65.

Schimmack, Rudolf. 1903. "Über die axiomatische Begründung der Vektoraddition." *Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physicalische Klasse*, pp. 317–325.

———. 1908. "Über die axiomatische Begründung der Vektoraddition." *Abhandlungen der kaiserlichen Leopoldinisch-Carolinischen deutschen Akademie der Naturforscher* 90 :5–104.

Zermelo, Ernst. 1904. "Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann." *Math. Ann.* 59 :514–516.