Intuition et arithmetique

Gerhard Heinzmann
Département de Philosophie, Laboratoire de Philosophie et d'Histoire des Sciences—Archives Henri Poincaré, UMR 7117 du CNRS, Nancy-Université

Dans son livre « Philosophie und Mathematik » Christian Thiel se pose la question « ob nicht die Idee einer Fundamentaldisziplin der Mathematik im Sinne einer „regionalen Ontologie" besser *ad acta* gelegt und stattdessen eine „Fundamentaldisziplin" ins Auge gefaßt werden sollte, die als fundamentaler *Kanon* für den Umgang „mit allem und jedem" in der Mathematik gerade die Aufgabe erfüllt, die einer Fundamentaldisziplin im Sinne der bisherigen Darlegungen zugedacht war »[1]. Dans un article antérieur, j'ai essayé d'appliquer cette suggestion de Thiel à la théorie des catégories[2]. À présent, j'examine les conséquences de cette idée pour l'intuition, surtout en arithmétique. Je prends comme point de référence les réflexions de Charles Parsons. En concevant le concept d'intuition en stricte analogie à la perception, il obtient un modèle intuitif de l'arithmétique en exclusion du principe de l'induction complète. Une approche opératoire pourra inclure l'induction complète dans le modèle intuitif.

Deux sortes d'intuitions ?

Depuis Marc Steiner et Charles Parsons[3], il est usuel de distinguer *«* l'intuition de x » et « l'intuition que p ». La première concerne la saisie d'un objet, d'un concept (par exemple si l'on est dans l'impossibilité de le définir), d'un énoncé ou d'une théorie entière, la deuxième

[1] Christian Thiel, *Philosophie und Mathematik*, Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1995.

[2] Gerhard Heinzmann/Ralf Krömer, Ontology versus Operations in the Foundations of Mathematics, *in*: E. Agazzi/Ch. Thiel (éds.), *Operations and Constructions in Science*, Erlanger Forschungen, Reihe A, Band 111, 107-125.

[3] Voir Marc Steiner, *Mathematical Knowledge*, Ithaca/London: Cornell Univ. Press, 1975, 117 et Charles Parsons, Mathematical Intuition. *Proceedings of the Aristotelian Society* N.S. **80**, p. 145-168. Les deux perspectives furent évidemment présentes dès le départ : la « noesis » platonicienne est une faculté de « voir » les idées, le « Nous » aristotélicien une faculté immédiate de fonder les premiers principes des sciences. Ces "principes" d'Aristote vacillent entre « propositions primitives » et « termes primitives ». Pour Ockham, la connaissance intuitive d'une proposition est fondée sur la connaissance simple des termes qui la composent (voir David Piché, « Introduction » *in :* Guillaume d'Ockham, *Intuition et abstraction*, Textes introduits, traduits et annotés par David Piché, Paris : Vrin, 2005, p. 7-51,, note 13, p. 10/11). Thomas Reid distingue entre l'intuition en tant qu'*appréhension* et l'intuition en tant que *jugement*. Dans cette dernière fonction, elle dénote l'affirmation ou la négation par l'intellect de propositions évidentes Thomas Reid, On Common Sense, *in* : W. Hamilton (éd.), *The Works of Thomas Reid*, vol. 2, Edinburgh, 1872, 759.

concerne la saisie de la vérité d'un énoncé ou le constat qu'une démonstration est concluante (par exemple, si l'énoncé n'est pas déduit d'un autre énoncé par une inférence ou si la démonstration possède des propriétés « intuitives »[4]). Quelle est la relation entre ces deux genres d'intuition ? On pourrait se demander si la proposition intuitivement vraie *que* « 2+2=4 » n'est pas fondée sur l'intuition *de* l'unité, de sorte que la proposition devient une *connaissance* fondée sur « l'intuition de ». Peut-on alors se limiter à la discussion de « l'intuition de » qui semble être la plus élémentaire ? Ce n'est pas évident, ni en philosophie ni en mathématiques. En mathématiques, les philosophes et mathématiciens ne sont guère d'accord sur les critères d'identité des objets mathématiques et même sur la nécessité d'envisager une ontologie d'objets mathématiques abstraits. Ceux qui s'y refusent, appelées« nominalistes », refusent en même temps « l'intuition de x » mais pourraient néanmoins défendre le caractère intuitif de propositions mathématiques en insistant, par exemple, sur l'ancrage de la structure arithmétique dans le sens commun des mathématiciens.

Intuition et modèle perceptif

Comparer l'intuition à la vue est une conception traditionnellement partagée par les empiristes et des rationalistes, qui utilisent les deux genres d'intuitions sus mentionnés. Ainsi, Platon se rapporte aux idées en considérant les « figures visibles »[5]. Selon John Locke, dans une connaissance intuitive, l'esprit aperçoit la vérité « comme l'œil voit la lumière, dès-là seulement qu'il est tourné vers elle »[6].

L'intuition ne pouvant cependant pas être identifiée à la perception, on pourrait la considérer comme « quasi-perceptive ». Dans un passé récent, la thèse selon laquelle l'intuition est à la fois « simple » et évidente parce que « quasi-perceptive », trouve deux interprétations dans le domaine mathématique :

i) Soit on suppose une *analogie* avec la perception ou l'introspection.
ii) Soit on dit que l'intuition *trouve* au moins *sa source* dans la perception.

Dans le premier cas, on ajoute alors au critère de simplicité l'exigence de « saisir une image » — où 'image' exprime la métaphore d'une vue 'pure'. Le mathématicien le plus cité qui soutient et précise le parallélisme entre physique et mathématiques par rapport à leur fondements « perceptifs» est sans aucun doute Kurt Gödel. Il est platoniste. Cette dénomination caractérise en vague référence à Platon, un réalisme conceptuel, c'est-à-dire une

[4] De telles propriétés intuitives sont par exemple « d'être combinatoire », « d'être fini » ou « d'être primitif récursif », c'est-à-dire calculable dans un sens bien défini.
[5] Voir Platon, Politeia, 510 c2, d 5-7.

position qui considère que les concepts mathématiques comme ceux d'« ensemble » ou de « nombre » existent dans un monde immatériel en tant qu'entités indépendantes de l'activité humaine. Se pose donc le problème de notre contact avec ce monde d'objets qui ne sont ni dans l'espace ni dans le temps. On attribue cette fonction de l'appréhension des entités extra-mentales et idéales à l'intuition. Afin que cette faculté soit néanmoins rationnelle, on a essayé de l'associer au paradigme d'un modèle épistémologique de la rationalité, à savoir celui qui installe une relation causale entre le sujet connaissant et l'objet connu : on a donc cherché une analogie entre intuition et perception tout en intégrant bien sûr la différence entre les deux facultés. Où chercher l'analogie entre elles ? Selon l'interprétation de Penelope Maddy, dans les deux cas de la physique et des mathématiques, « des théories impliquant des entités ou des processus 'non observables' (c'est-à-dire des entités ou des processus qui portent au-delà du domaine de la perception des sens ou de l'intuition mathématique) sont formées dans le dessein d'expliquer, de prévoir et de systématiser des faits élémentaires (de perception et d'intuition), et elles sont évaluées en fonction de leur succès »[7]. Et cependant, le parallélisme entre les connaissances mathématique et physique reste difficile à préciser quant à son ancrage perceptif.[8] A la difficulté soulignée par Paul Benacerraf, (comment comparer la connaissance d'objets causalement inertes avec une connaissance causale ?), s'ajoute le problème qu'une position nominaliste ou structuraliste, qui n'admet pas des entités individuellement identifiables et bien déterminées en mathématiques, est neutre par rapport au problème de la perception, c'est-à-dire par rapport à la question de savoir comment nous obtenons la représentation d'un objet concret (singulier).

Intuition et connaissance

On pourrait se demander si l'intuition en mathématique conduit à une connaissance au sens d'une croyance vraie. George Bealer a soutenu que non. Intuitionner en mathématiques des objets abstraits ou des propositions, est — semblable à l'illusion (par exemple celle de Müller-Lyer) — indépendant de la croyance : l'axiome de compréhension — disant que l'extension de toute propriété forme un ensemble — est et reste intuitif, bien qu'on n'ait aucune croyance de sa vérité[9] et bien que l'on soit le plus *attentif* au sens de Descartes[10]. S'il

---

[6] Essai philosophique concernant l'entendement humain, IV, 2, §1.
[7] Peneloppe Maddy, Perception and Mathematical Intuition, *Philosophical Review* **89** (1980), p. 163-196, 163.
[8] Que l'intuition *guide* la connaissance en physique et en mathématiques (fonction (b)) n'est mise en doute par personne ou presque.
[9] Car on sait que l'axiome de compréhension qui est bien intuitif conduit à l'antinomie de Russell.

existe une intuition pure, elle ne conduit donc pas nécessairement à une croyance et la croyance n'est pas nécessairement intuitive : le théorème mathématique dont la vérité est une croyance justifiée parce que l'on comprend toutes les étapes de sa démonstration sans pour autant avoir une intuition de cette vérité en est la preuve[11]. L'intuition est indépendante de la croyance (belief-independent[12]). Nous sommes donc devant le dilemme suivant : bien que l'on ne puisse en apparence pas « défaire » l'intuition mathématique par une croyance vraie qui est justifiée par une démonstration (i), il est raisonnable d'accepter que l'intuition, comme la perception et l'introspection, puisse bien être erronée : on peut intuitionner quelque chose de faux[13] (ii). La partie (i) confirme le doute, soulevé par le problème de Gettier, en la valeur épistémique d'une croyance vraie justifiée. Dans cette perspective, la vraie connaissance « profonde » qui est intuitive, ne peut être atteinte par une croyance vraie justifiée. La deuxième partie (ii) conduisait les naturalistes à assimiler les intuitions à des hypothèses initiales, bien plus faibles qu'une croyance vraie et justifiée. Sans avancer les arguments, j'adopte l'esprit de cette deuxième solution en soutenant que l'intuition n'est pas une connaissance, et pas davantage une croyance ; elle semble être plutôt une des *sources* de notre connaissance.

Bien que quelques propositions intuitives élémentaires (2+2=4) semblent plus évidentes que quelques jugements de perceptions élémentaires (ce vélo est bleu), l'intuition n'est pas une capacité cognitivement pénétrable : elle survit à sa réfutation, persiste en dépit des arguments que la contredisent. Il serait alors bien d'étudier non seulement les circonstances favorables à son application mais également les circonstances potentiellement défavorables. Comment l'intuition peut-elle être à la fois non-justifiable, simple, évidente, relativement stable à l'intérieur d'un contexte donné et donc épistémiquement significative et néanmoins cognitivement erronée bien que peut-être corrigible ? N'est-ce pas paradoxal ? Pourquoi ou dans quelle condition l'intuition peut-elle être erronée ?

Goldman et Pust donnent deux indices d'erreur[14] :

---

[10] Sauf si l'on utilise « attentif » au sens purement terminologique pour « intuitif ».

[11] Voir George Bealer, The incoherence of Empiricism, *in* : Steven J. Wagner/Richard Warner (éds.), *Naturalism. A Critical Appraisal*, Notre Dame : University Press, 1993, 163-196, 166.

[12] Voir Gareth Evans, *The Varieties of Reference,* Oxford : Clarendon Press, 1982, 123 et Charles Parsons, Reason and Intuition, *Synthese* ***125***, p. 299-315, p. 310.

[13] Le même phénomène s'observe avec les illusions perceptuelles. Même si je sais que les deux lignes horizontales de l'illusion de Müller-Lyer sont égales, je 'voie' des longueurs inégaux. Il est difficile à dire si dans les deux cas de l'illusion et de l'intuition, la persistance analogue est indépendante du champ cognitif ou si elle est, pour sa part, déjà acquise.

[14] Voir Alvin Goldman, Joel Pust, Philosophical Theory and Intuitional Evidence, *in* : *Rethinking Intuition. The Psychology of Intuition and its Role in Philosophical Inquiry*, ed. Michael R. DePaul/William Ramsey, Lanham/Boulder/New York/Oxford: Rowman & Littlefield Pub., 1998, p. 179-197, 179.

1° un manque d'information ou une désinformation du sujet qui a une intuition ;
2° une contamination par une théorie, étant entendu que l'intuition plus fiable est pré-théorique.

Le premier critère stipule une dépendance de l'intuition à l'égard de notre état cognitif général. Il explique, par exemple, qu'un mathématicien bien informé sur une certaine théorie mathématique a des intuitions mathématiques plus fiables que celle d'un non-mathématicien par rapport au même objet. C'est aussi vrai que trivial, le cas intéressant est celui du mathématicien bien informé qui a une intuition fausse qui plus est, persistante.

Le deuxième critère est bien traditionnel : De Bergson à Maddy, on explique l'erreur par l'introduction dénaturante (Bergson) ou du moins imprécise (Maddy) de la formulation linguistique censée exprimer l'intuition (celle-ci étant en elle-même non-linguistique ou tacite). En d'autres termes, on sait expliquer le paradoxe de l'intuition au prix de l'hypothèse qu'il existe au moins un « élément » de la connaissance qui, si elle n'est pas indépendante de tout système sémiotique, « précède » du moins les formes linguistiques. En ceci, l'analogie avec la perception semble même tenir debout. En effet, des arguments de la psychologie cognitive montrent probablement que la croyance perceptuelle n'est ni nécessairement consciente ni nécessairement linguistique[15].

Si, premièrement, l'intuition « précède » les formes linguistiques, si, deuxièmement, elle n'est pas une croyance et encore moins une connaissance, la confiance que je peux avoir en elle n'est-elle alors pas exclue d'une accessibilité rationnelle ? C'est en effet le cas, si l'on juge que celle-ci se limite à la rationalité théorique.

Intuition et modèle de compétence

Nous avons ainsi rejoint l'endroit systématique qui nous relie à la thèse de Thiel pour une justification intuitive d'un modèle des nombres. Dans le « modèle perceptuel », on juge que l'adéquation fournie par l'intuition est entre la chose (*token ou type*) et la représentation, dans le « modèle de compétence », on l'installe entre la représentation et le canon propre à sa justification, c'est-à-dire on substitue une approche épistémique à une approche ontologique de l'intuition.

Que l'on ne se méprenne pas. Je ne veux pas limiter l'intuition au niveau pré-langagier, ni au sens de Bergson ni au sens de Maddy. L'intuition joue également son rôle épistémique dans

[15] Cf. Maddy, op. cit., 171-178. La prudence doit être de rigueur en interprétant les résultats scientifiques récents. Les uns maintiennent la thèse de la continuité entre perception et cognition, les autres, surtout Pylyshyn, distinguent un premier stade de la vision pré-perceptuelle qui est impénétrable pour la cognition et indépendant du cadre de vie (voir Zenon Pylyshyn, *Seeing and Visualizing. It's Not What You Think*, Cambridge (Mass.)/London : The MIT Press, 2003).

les mathématiques les plus abstraites. Pour rendre compte de ce fait, on a introduit des intuitions secondaires[16], tout comme les philosophes d'autrefois n'hésitaient pas à introduire des substances secondaires. Cependant, je ne pense ni retourner au mythe d'une fondation absolue, négligeant ainsi l'influence culturelle ou informationnelle sur l'évidence intuitive, ni rendre compte de cette influence en concevant une frontière *floue* entre les deux sortes d'intuitions[17]. Je soutiens un modèle unique. Dans un esprit goodmanien, j'argumente en faveur de la thèse que la différence entre les multiples manières de trouver une évidence cognitive (par la perception, par l'intuition perceptive, par l'intuition intellectuelle, etc.) ne tient ni à la nature de leurs objets, ni au type de la faculté cognitive utilisée (cognition conceptuelle ou non conceptuelle), mais relève d'une différence entre fonctionnement syntaxique et fonctionnement sémantique d'un système sémiotique. Appliquée à une « intuition perceptive » — « l'intuition perceptive » n'est pas à confondre avec le modèle cognitif perceptuel — le modèle de compétence abandonne le critère de la *saisie* d'un « objet ».

Dans le modèle perceptif, nous devrions considérer l'intuition d'un raisonnement en tant que « l'intuition de ». En effet, considérer une action en tant qu'objet *fait* de l'action un objet. Son caractère actif se perd. D'où l'idée de Piaget et d'autres d'introduire un troisième genre d'intuition que j'appelle « schématique ». Elle ne concerne pas seulement le raisonnement, car tout objet peut être construit comme résultat d'une action ; par exemple, pour être bref, en le *regardant* ou en le *nommant* (plus exactement, il s'agit de constituer la signification d'un objet par tout un faisceau d'actions). Ce type d'intuition, qui possède à la fois des caractères intellectuels et perceptifs, est certes controversé, mais semble en même temps assez porteur en mathématiques :

- il est controversé parce qu'à première vue, on se demande s'il n'est pas réductible à « l'intuition de » ou à « l'intuition que » ou, au contraire, s'il est subreptice (il susciterait l'impression que ce qui est par principe non-intuitif, par exemple les processus d'itération, peut néanmoins être intuitionné[18]).
- il est intéressant parce qu'il permet de construire d'un modèle intuitif de l'arithmétique.

[16] Voir Efraim Fischbein, *Intuition in Science and Mathematics. An Educational Approach*, Dordrecht/Boston/Lancaster/Tokyo, 1987, p. 65sqq.

[17] Voir Fischbein, op. cit., p. 70. Il conviendrait alors d'ajouter encore une autre frontière floue entre l'intuitif secondaire et le conceptuel.

[18] Voir Reidemeister, *Geist und Wirklichkeit*, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1953, p. 19 et Klaus Volkert, *Die Krise der Anschauung*, Göttingen : Vandenhoeck & Ruprecht, 1986, p 164.

On peut entrevoir deux sortes d'intuition schématique de signes :

a) un usage de signes est intuitif, si les aspects pragmatique et sémiotique sont liés par une corrélation inséparable de sorte que le signe ne représente pas encore d'une manière indépendante d'un contexte donné. C'est le cas pour la performance singulière et sa recognition générale. De même, les instances et leur schème ne sont que différents aspects d'un même particulier.

b) J'appelle « intuitive » au sens large la capacité d'interpréter un usage iconique de signes dans une perspective représentative (une icône seule ne présente que des qualités vues dans la perspective de l'interlocuteur sans pour autant les représenter).

Un modèle intuitif de l'arithmétique élémentaire

Pour obtenir un modèle intuitif de l'arithmétique, il paraît peu prometteur de caractériser les nombres naturels à partir de l'idée de Frege et de Dedekind, celle d'une définition « d'en haut », c'est-à-dire comme ensemble minimal clos par rapport à l'opération de succession. Dans ce cas, il faudrait déjà pouvoir disposer du concept intuitif d'ensemble. On devrait plutôt utiliser l'idée de la définition « d'en bas » qui fut soutenu principalement par Poincaré et Hermann Weyl :

D 1 :

(a) 0 est un nombre naturel

(b) Si *n* est un nombre naturel, alors *S(n)* en est également un (*S(n)* étant le successeur de *n*)

(c) Les nombres naturels ne sont que des objets engendrés par les clauses (a) et (b).

Chez Poincaré et Weyl, cette définition a été fondée sur l'intuition de la succession. En se référant encore aujourd'hui à l'intuition, il faut prendre en considération un argument de Parsons : même si l'intuition pouvait jouer un rôle important dans la construction d'un modèle intuitif de la théorie axiomatisée des nombres, il n'est nullement nécessaire et il n'est pas probable que l'on parvienne à une intuition des nombres eux-mêmes[19].

Tout en souscrivant cette remarque, je me demande si l'on peut dépasser certaines limites, imposées par Parsons au rôle justificatif de l'intuition en mathématiques en abandonnant le modèle perceptif. Peut-on surtout trouver une interprétation intuitive du principe de

[19] Voir Charles Parsons, Intuition and Number, in : Alexander George (ed.), *Mathematics and Mind*, New York/Oxford : Oxford University Press, 1994, p. 141-157, 145.

l'induction complète (ce à quoi Parsons n'est pas arrivé) ? C'est la question que nous allons étudier à présent.

Comme Parsons, j'utilise comme modèle d'interprétation intuitive de l'arithmétique le « calcul » à partir de traits, en commençant par la performance des actions comme

"voir 'I'", "dessiner 'I'", "'accompagner le voir de 'I' par un geste vocal 'trait'" etc.

"voir 'I,I,I'", "dessiner 'I,I,I'", "'accompagner le voir de 'I' par un geste vocal 'trait-trait-trait'" etc.

Selon un processus bien décrit par Kuno Lorenz[20], on peut s'approprier, à partir de la palette des performances, des actions sous l'aspect « token » et on peut les objectiver sous l'aspect « type » pour obtenir, finalement, le *schème* « trait » dont les réalisations sont appelés *instances*.

Si l'on défendait un modèle perceptif, on objecterait à juste titre que même un « token » du premier ordre ne peut pas représenter intuitivement en tant qu'instance le schème, compte tenu du fait qu'il n'est pas perceptible (un « token » est toujours un « token » du schème et n'est donc perceptible qu'en tant qu'exécution mais non en tant que « token » tant que l'on ne dispose pas du schème). Contrairement au modèle perceptif, dans le modèle de compétence la distinction entre « objet concret » et « objet quasi-concret » ne fait guère de sens : d'une part, le singulier n'est pas un objet, et d'autre part, les « tokens » possèdent déjà un caractère abstrait dans la mesure où c'est une performance et non un « token » qui, au sens strict, se trouve exécutée. Pour obtenir le « token », est requis une appropriation par rapport à la performance, c'est-à-dire une autre action qui la thématise. Bien que les « tokens » soient liés par une relation causale à la performance, pour les interlocuteurs, ils sont des invariants produits qui ont la même nature abstraite que les « types ». Ces derniers ne sont pas des abstractions des « tokens », mais des objectivations de l'aspect sémiotique d'une action.
A la prochaine étape, l'objectivation de concaténation de traits livre la base d'une connaissance propositionnelle simple telle que « III est plus 'grand' que II ». Mais la situation change déjà si l'on prend en considération une proposition comme « 1020 (traits) est plus 'grand' que 1019 » et, *a fortiori*, si l'on passe à une proposition universelle telle que « Toute

[20] Voir Kuno Lorenz, "Logic as a Tool of Science versus Logic as Scientific Object", in: J. van Benthem, G. Heinzmann, M. Rebuschi, H. Visser, *The Age of Alternative Logics. Assessing Philosophy of Logic and Mathematics Today*, Springer, 2006, 299-310.

concaténation de traits peut être augmentée d'un trait ». Cette dernière proposition exprimant *l'infinité potentielle*, ne peut être fondée ni sur une perception ni sur une seule action actuelles, parce qu'elle exprime une concaténation *arbitraire* de traits. Par contre, ajouter, pour un n fixe, à la n-ième concaténation, un trait, s'exprime au niveau propositionnel par une proposition singulière.

Le fait que l'on puisse ajouter un trait « I » à une concaténation quelconque de traits a trouvé dans une tradition qui remonte à Hugo Dingler et à Paul Lorenzen, une notation comme règle **R,** interprétée maintenant comme opération schématique dans une interaction dialogique :

R1 : *(a)* $\Rightarrow I$

(b) $n \Rightarrow nI$ *(n* est une variable « propre » : elle ne marque qu'une place pour une figure *déjà construite* selon **R** 1**).**

Comment faut-il lire la règle **R1** qui sert à construire une séquence de termes schématiques de traits ? Le signe « $\Rightarrow$ » n'est pas un opérateur logique (et surtout pas l'implication), mais un opérateur dit « empragmatique ». Il signifie « on peut faire ! » ou « il est permis de construire ! ». Ainsi, la clause a) signifie qu'il est permis de construire le schéma « I ». « I » est donc l'objet d'un calcul et (a) présuppose ce que je veux appeler avec Lorenz la « compétence d'objet ». Considérée dans la perspective de la « compétence d'objet », la partie (b) de la règle **R1** ne fait aucun sens : elle signifierait qu'on ajoute à la lettre « n » le terme « I », pourvu que l'on dispose déjà de la lettre « n ». Or, ce que l'on veut évidemment dire est que l'on peut ajouter un terme (schème de trait) à un autre, c'est-à-dire construire des successeurs. En fait, pour comprendre l'expression, il faut utiliser à la fois la « compétence d'objet », que l'on peut appeler « intuition opératoire » (iconicité externe), et une « méta-compétence » symbolique : *« nI »* est un terme si n en est un, mais *« nI »* appartient en tant que partie de la règle au langage *sur* les termes et *« n »* est alors un signe schématique (paramètre) pour des termes déjà construits. Comme lors de la dualité entre « token » et « type », nous avons une situation intuitive de dualité d'un ordre supérieur entre compétence d'objet et méta-compétence qui transgresse la distinction entre « intuition de » et « intuition que ».

Il est peut-être utile de confronter cette analyse au langage ordinaire des mathématiciens : « il existe une fonction *f* (appelée « successeur ») tel que

R1' : $f(n)=n+1$.

En (b), l'opération de successeur est exécutée, en (**R'**) elle est nommée par un signe de fonction ; le résultat en (b) *est* un terme, tandis qu'en (**R'**) le terme est nommé en tant qu'image de l'argument. La clause (b) est intuitive parce que la séparation entre objet et symbole n'y est pas encore effective : elle ne se montre que dans les différents aspects d'une action : tantôt celle-ci est le résultat de la compétence d'objet, tantôt le résultat de la métacompétence. La construction et la description des objets n'est pas indépendante.

L'argumentation se laisse transposer littéralement à la règle

R2 : *(a)* $\Rightarrow I=1$

(b) $m=n \Rightarrow mI=nI$

A partir de l'interprétation intuitive des règles R on vérifie que les 4 premiers axiomes de Peano, reformulés dans le langage des « traits-concaténation », sont vrais par rapport à **R** ce qui signifie que PA possède un modèle « intuitif »[21] :

PA 1' : « I est un concatenation de trait » est vrai à partir de **R1 (a)**

PA 2' : « I≠n pour tout n » est vrai » parce que la règle **R2** ne peut conduire au résultat I=n.

PA 3' : « n est une concaténation de trait → nI est une concaténation » (« → » symbolise l'implication matérielle : « si - alors ») est une proposition vraie selon la règle **R1 (b)**.

PA 4' : « m≠n ↔ mI≠nI » est vraie selon **R2 (b)** ; car la proposition « m=n → mI=nI » est vraie directement d'après **R2 (b)** (« ↔ » symbolise l'équivalence matérielle : « si et seulement si»); puisque « mI=nI → m=n » est également vraie (selon construction, « mI=nI » est obtenue à partir de « m=n ») on a « m=n ↔ mI=nI », d'où suit le résultat.

Qu'advient-il du **PA 5**, c'est-à-dire de l'induction complète ?

Je veux analyser dans la suite une argumentation qui passe par une justification intuitive de l'adjonction d'une clause finale à la règle **R 1** qui dit :

(c) que toutes les concaténations de traits ne sont que des objets générés par les règles (a) et (b) de **R 1** ;

L'argument se résume comme suit : si l'on accepte qu'un particulier puisse représenter intuitivement (en tant qu'icône) un type universel, alors la clause finale possède également un caractère intuitif qui se transpose à l'induction complète.

[21] Voir Paul Lorenzen, *Differential and Integral. A Constructive Introduction to Classical Analysis,* Austin and London : University of Texas Press, 1971, p. 6-9.

1. Il est bien connu que la clause finale *(c)* est en corrélation avec la traduction de l'induction complète dans le langage du calcul de traits[22] :

PA 5' : Si une propriété ***A*** est vraie de *I*, et, si elle l'est également pour le successeur de chaque trait-concaténation pour laquelle elle est vraie, alors ***A*** est vraie pour tout trait-concaténation. En termes symboliques en a :

$[A(I)\wedge \forall n(A(n) \rightarrow A(nI))] \rightarrow \forall n\, A(n))$

En d'autres termes, on ne peut, d'une part, prouver la clause finale à partir des clauses (a) et (b) sans utiliser une application de ***PA 5'*** et, d'autre part, une justification 'directe' de ***PA 5'*** exige ***R 1 + (c)***.

2. Examinons de plus près la structure interne de la clause ***R1 (b)***. Nous avons vu que l'on ne peut séparer l'aspect pragmatique (compétence d'objet) et sémiotique (méta-compétence) de la clause *(b)* de ***R 1*** dans sa fonction de règle de construction. C'est pour cette raison que l'on doit appréhender la clause *(b)* à un niveau de réflexion plus élevé pour pouvoir la considérer en tant qu'objet et non seulement comme action en tant que moyen. Considérée en tant que moyen, la clause *(b)* permet, certes, d'indiquer pour une trait-concaténation quelconque *n*, une opération par rapport à ***R 1*** menant à une construction de *n*, mais il est impossible d'indiquer une forme de construction uniforme pour tout *n*. Car la longueur de la construction, c'est-à-dire le nombre d'application de la clause b), dépend de *n*, telle qu'une construction singulière, pour un certain *n*, ne peut pas être considérée, vue sa structure interne, comme instance de la clause finale. Le schème de construction obtenu à partir des applications singulières de *(b)*, ne peut être représenté au même niveau par une instance singulière. Le sens de l'induction complète ne consiste pas — si l'on ne la confond pas avec l'induction infinie[23] — dans le fait de constater que les cas singuliers ont une propriété commune, mais dans le fait que cette propriété se transmet héréditairement. Ainsi, considérée en tant qu'objet, la clause ***(b)*** présente par rapport à sa structure externe d'une manière iconique la qualité exprimée par ***(c).***

3. Le passage de la structure interne de la construction d'une instance à la structure externe de différentes constructions est ce que Jean Cavaillès appelle une *thématisation* par *séparation*

---

[22] Voir Stephen Cole Kleene, Introduction to Metamathematics, (11952), (North-Holland), Amsterdam/Groningen, 1980, p. 21/22 et Charles Parsons, The Impredicativity of Induction *in* : Michael Detlefsen (ed.), *Proof, Logic and Formalization*.. London/New York: Routledge 1992, pp.139-161, p. 142.

[23] A(1), A(2), A(3)……, alors ∀x A(x).

verticale[24]. Ce n'est qu'au niveau d'un méta-point de vue que l'action exprimée par la clause ***(b)*** peut être lue dans sa globalité comme instance d'un type universel qui présente iconiquement ou exemplifie intuitivement la clause finale ***(c)***. Le principe qui guide cette présentation n'entraîne pas notre croyance à une certaine proposition tenue jusqu'alors pour douteuse, mais nous montre une possibilité d'action. À cet égard, Wittgenstein a bien raison de conclure que la nature de l'induction complète est "inexprimable"[25], celle-ci n'ayant d'autres fonctions que celle d'un "poteau indicateur" qui nous offre l'occasion de « voir une possibilité infinie »[26]. Cet indicateur ne doit surtout pas être confondu avec le chemin à prendre lui-même[27] : peut-on exclure dans la clause ***(b)*** une itération infinie ? Rien ne l'exclut formellement, car dire que l'itération doit être finie reviendrait à dire qu'elle doit intervenir n-fois pour un certain nombre n, ce qui est visiblement circulaire[28]. L'intuition est « pragmatiquement » évidente, épistémiquement significative mais formellement impénétrable.

---

[24] Voir Jean Cavaillès*, Sur la logique et la théorie de la science* 1976 ([1]1947), Paris : Vrin, 27.
[25] Cf. Ludwig *Wittgenstein, Vorlesungen 1930-1935*, J. King/ D. Lee; A. Ambrose/ M Macdonald, Frankfurt: Suhrkamp, *1984*, 34.
[26] *Ibid.*, 135.
[27] [Voir Ludwig *Wittgenstein, Philosophische Bemerkungen*, Hrsg. R. Rhess ([1]1964), Frankfurt: Suhrkamp, 1984, XIV, § 164 ; Ludwig Wittgenstein und der Wiener Kreis. Gespräche aufgezeichnet von Friedrich Waismann, Hrsg. B.F. Mc Guiness ([1]1967), Frankfurt: Suhrkamp,135.
[28] Voir Alexander George and Daniel J. Velleman, Two conceptions of natural number, in : H.G. Dales (ed.), *Truth in Mathematics*, Oxford : Clarendon Press, 311-327.